



KOKOS

36. ročník * 4. leták

Konečně už je tady čtvrtá série! Připravili jsme si pro Tebe dalších šest zajímavých příkladů včetně tentokrát odpočinkového příběhu. Svá řešení můžeš posílat do 14. dubna 2024. Tak ať to dobře počítá!

Vaši Organizátoři

Zadání úloh

V dalekém království za devatero horami a řekami žila byla princezna Filoména. Byla to princezna líbezná, milá, spanilá a převelice chytrá, ale pokud jsem minule psala, že po událostech posledních dnů a týdnů měla všeho plné zuby, teď už to byla zaručeně pravda. Námlogy následované ne jedním, ale hned dvěma únosy, to by skolilo i toho nejstatečnějšího hrdinu. A tak se princezna rozhodla, že v zájmu svého psychického zdraví bude nejlepší, když odjede do lázní. Autorka tohoto textu nadšeně souhlasila, neboť i ona začínala pociťovat jisté kreativní vyčerpání, a tak bude tento příběh krátký, pravděpodobně nudný, předvídatelný, no zkrátka a dobře – odpočinkový!

Přenesme se tedy na nádvoří zámku – princezna už měla sbalené všechny kufry, koně byli zapřaženi, služebnictvo na svých místech, zbývalo už jen jediné...

„Budete mi tak chybět!“ zvolala Filoména, momentálně ztracena v kočičím objetí.

„Ty nám také!“ vzlykali její moudří chlupatí přátelé.

„Za týden jsem zpět,“ ujišťovala je princezna. „To uběhne jako nic!“

„Jen na sebe dávej pozor!“ prosily ji kočky. „A když už tam budeš, tak si to pořádně užij! Kdoví, třeba v lázních narazíš i na nějakou tu matematiku!“

A tak princezna nasedla do kočáru, kočí práskl opraťemi a vydali se na cestu.

O den později tou dobou už ležela hezky naložená v termálním bazénku, záda jí hezky masíroval teplý gejzír a po jejím boku si tu stejnou slast užívala skupinka jejích nových společníků. Princezna totiž během několika prvních hodin svého pobytu v lázních usoudila, že přece jen není tak úplně připravená na to, aby následující týden strávila ve vodě omamována horkou párou, to by její mozek zkrátka nevydržel. A tak nezahálela a po méně než dvanácti hodinách od Filoména příjezdu měly Královské lázně svůj první Matematický klub.

Princezna byla na tento svůj počín náležitě hrdá! Členská základna byla, pravda, velice rozmanitá, to však ničemu nevadilo! Hlavní náplní Matematického klubu bylo vzájemně si krátit dlouhou chvíli řešením příkladů a jejich vymýšlením pro ostatní členy, a zrovna to se právě odehrávalo v bazénku.

„Vážení, já mám jeden naprrrosto perrrfeční!“ zaskřehotala paní ježibaba Jana, která do lázní přijela rehabilitovat po výměně kyčle. Paní Jáža, jak byla známa mezi svými spolurekreaty, byla velice milá stařenka (ano, to u ní byli Jeníček s Mařenkou na brigádě). Na svůj věk 329 let byla navíc velice aktivní, na operaci kyčle musela jen proto, že se zranila při závodech v letu na koštěti. Zároveň byla paní Jáža vášnivou luštitelkou všemožných křížovek, přesmyček a rébusů, a tak Filoméně nedalo mnoho práce přesvědčit ji o kouzlu matematických příkladů.

„Prrosím, jen se pokuste vážení! Je to pěkně tvrdý voříšek, to vám teda řřřeknu!“

Úloha 1. (5 bodů):

Na svém posledním závodě na koštěti paní Jáža ve třech etapách uletěla 65 km. V první etapě uletěla dvakrát tolik, co ve třetí. Ve druhé etapě uletěla o 10 km méně než v první etapě. Kolik km uletěla v každé etapě?

„To je krásný příklad!“ zvolala princezna. „Chybí vám závodění?“ „Jojo, děvče, nikdo nemládne. . . Holt ty kosti už nesou, co bývaly. . . Ale mezi náma, já bych litala, i dybych měla mít šeky klouby umělé!“ zasmála se Jáža.

„Já se vám tedy divím,“ vložil se do toho líný Honza (o něco chytřejší a línější bratr hloupého Honzy). „Já kdybych mohl, tak nedělám vůbec nic.“ A přesně proto se také rozhodl jet do lázní. „Fakticky! Ani ten příklad bych nejradši nevymýšlel, ale když na tom trváte. . .“ Honza zapátral očima po místnosti a zrak mu padl na velké hodiny. „No tak tedy dobře“

Úloha 2. (7 bodů):

Hodiny ukazují 10:00. Jak velký (konvexní) úhel budou svírat hodinová s minutovou číčkou za čtvrt hodiny?

„Tak, ale na řešení musíte přijít sami, protože já jsem moc líný to počítat.“

„Ts ts ts, vy jste vážně neskutečný. . . S takovou pracovní morálkou byste u nás v jezeře nepřežil ani týden. . .“ ušklíbla se rusalka Adriana a pohodila hlavou s hřívou dlouhých rudých vlasů. Adriana si v lázních léčila zánět ucha. Nesvědčila jí studená voda. . . „U nás to funguje tak, že kdo je líný, ten nejí, víte? My rusalky to máme těžké. Musíme se pořádně ohánět, abychom měly večeri. A vidíte, zrovna to mě teď inspirovalo k vymýšlení příkladu. . .“

Úloha 3. (6 bodů):

Jak je známo, rusalky se živí dušemi mladých mužů, které utopí. Adriana si o svých obětech vede podrobné statistiky, a tak například ví, že pětina z nich měla blond/áté vlasy, 40% mělo vlasy hnědé, černovlasých mládenců ulovila dvakrát více než zrzavých a zrzků byla jen čtvrtina oproti tomu, kolik bylo hnědovlasých. Jaké jsou poměry zastoupení barvy vlasů Adrianiných obětí?

„To je...lehce morbidní...“ podotkla princezna nejistě. „A dalo by se říci, že i neetické... Obávám se, že zákony království se budou muset v tomto ohledu poněkud zrevizovat...“

„Se vši úctou, Vaše Výsosti, a co pak máme jako jíst?“ rozzlobila se rusalka.

„No to by tak hrálo, zakazovat jídlo!“ přisadil si další člen Matematického klubu, Otesánek. „Snědl jsem mámu, tátu, a vás princezno, vás taky sním, pokud na něco takového jen pomyslíte. Anebo víte co, nesním, ale jen když vyřešíte tady tenhle příklad...“

Úloha 4. (7 bodů):

$$\text{Řešte rovnici } \sqrt{x+36} + \sqrt{2x-33} = \sqrt{6x+6}$$

Princezna, po tom, co si uvědomila, jaká je v jejím Matematickém klubu koncentrace lidožravých bytostí, začala přehodnocovat svá dosavadní životní rozhodnutí... Otesánkovi rovnici přesto vyřešila za pár chvil. S nadějí se obrátila na posledního člena svého klubu, takového roztomilého chlupačoučkého pejska (pozn. autorky: Princezna v životě psa neviděla, na svém zámku vydržovala výhradně kočky. Roztomilý je navíc v tomto kontextu poněkud relativní termín. Ano, oproti Otesánkovi bylo ono zvíře skutečně roztomilejší.): „A jak vy se stavíte k požívání lidí?“

Vlk vycenil zuby. „Nó, víte, už to není, co bejvalo...“ odpověděl posmutněle. „Posledně mi rozpárali břicho a vod tý doby mám v týdle voblasti jistý potíže... Ale tady v lázních maj aspoň docela dobrý steaky. A díky vám sem dokonce vobjevil matematiku! No já si nestěžuju! Poslechněte si ten příklad, co sem vymyslel!“

Úloha 5. (7 bodů):

Je dána řada čísel: 2, -3, 7, -13, 27, ? Jaké číslo patří na místo otazníku?

Ostatní se hned čile pustili do debaty o možném řešení, o Filoménu se už ale začínalo pokoušet zoufalství. Tu k ní však v bazénku připlula zlatá rybka a s chápavým pohledem se jí zeptala: „Už to nedáváte, co?“

„Ne... To tady všichni kromě mě někoho snědli?“ vzlykla princezna. „No, technicky vzato, ježibaba Jenička s Mařenkou nakonec nesnědla, to jsou jen pomluvy... Ale jinak asi ano, kromě Honzy... Tedy když se nebudeme bavit o tom lososovi, kterého jste měla včera k večeři. To by totiž trochu měnilo situaci, chápete. Každopádně, i když jsem ho osobně neznala, slyšela jsem o něm, že v podstatě stejně neměl žádnou osobnost,

takže můžete být klidná.“ Princezna znovu vzlykla. „Ale no jo, chápu, že jste teď momentálně v depresi. Tak víte co? Co kdybych vám splnila jedno přání! Stačí vyřešit jeden jednoduchoučký příkladeček a jste doma u svých koček, které jistojistě nikdy nikoho nesnědly a ty myši si to beztak zasloužily...“

Úloha 6. (8 bodů):

Dokaž, že pro libovolná čísla a , b platí rovnost: $(a - b)^4 = (b - a)^4$

Takový důkaz byl pro princeznu hračka, a tak se o pár vteřin později ozvalo puť a po Filoméně nezbylo nic kromě obláčku kouře nad bazénem. Ve stejnou chvíli se zjevila ve své komnatě na zámku a vyrušila tak několik rozespalých chlupatých bochníků.

„To už jsi zpátky?“ ptali se zmateně. „Vždyť jsi byla pryč sotva den!“

„Už bylo toho odpočívání dost! Řeknu vám, narazila jsem tam na pěkně divná individua... Pojd'me se radši pustit do práce! Mám takový pocit, že existuje pár zákonů o lidojedství, které je třeba doplnit...“

Řešení úloh 4. série pošlete do 14.4.2024 na známou adresu:

KoKoS

Gymnázium Mikuláše Koperníka

gmkkokos@seznam.cz

Autorská řešení 3. série

Úloha 1.

Jeníček s Mařenkou opravovali ježibabě perníkovou chaloupku. Ježibaba, na rozdíl od toho, co se o ní všeobecně dočtete, nebyla vůbec zlá a za práci jim spravedlivě zaplatila. Jeníček odvedl víc práce a tak taky dostal o 480 korun devaterohorských víc, než je polovina sumy, kterou dostala Mařenka. Dohromady dostali 3 360 korun. Kolik peněz dostal za práci Jeníček a kolik Mařenka?

Řešení:

Nechť Mařenčiny peníze označíme x Kč, jejich polovina je $\frac{1}{2}x$ Kč.

Všechny Jeníčkovy peníze tedy jsou $\left(\frac{1}{2}x + 480\right)$ Kč.

Spolu vydělali 3360 Kč, tedy:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}x + 480\right) + x &= 3360 \\ x &= 1920\end{aligned}$$

Verča

Úloha 2.

Délky hran kváдру jsou vyjádřeny celými čísly v cm. Dvě z jeho stěn mají obsahy 135 cm^2 a 255 cm^2 . Jak velký objem může mít tento kvádr? Vypište všechna správná řešení.

Řešení: Obsah stěny kváдру je roven součinu jejich stran, proto nejprve rozložíme čísla 135 a 255 na prvočíselný součin.

$$135 = 3 \times 5 \times 3 \times 3$$

$$255 = 3 \times 5 \times 17$$

Odtud dostáváme, že délka společné hrany zadaných dvou stěn může být:

- 1 cm (zbývající hrany jsou 135 cm a 255 cm)
- 3 cm (zbývající hrany jsou 45 cm a 85 cm)
- 5 cm (zbývající hrany jsou 27 cm a 51 cm)
- 15 cm (zbývající hrany jsou 9 cm a 17 cm)

Objem kváдру může být:

$$1 \cdot 135 \cdot 255 = 34425\text{ cm}^3$$

$$3 \cdot 45 \cdot 85 = 11475\text{ cm}^3$$

$$5 \cdot 27 \cdot 51 = 6885\text{ cm}^3$$

$$15 \cdot 9 \cdot 17 = 2295\text{ cm}^3$$

Vítek

Úloha 3.

Napište číslo 100 pomocí:

- a) čtyř stejných číslic;
- b) pěti stejných číslic;
- c) šesti stejných číslic;
- d) deseti stejných číslic.

Řešení:

a)

$$99 + \frac{9}{9} = 100$$

b)

$$111 - 11 = 100$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5 = 100$$

$$33 \cdot 3 + \frac{3}{3} = 100$$

$$(5 + 5 + 5 + 5) \cdot 5 = 100$$

c)

$$(111 - 11) : 1 = 100$$

$$(999 - 99) : 9 = 100$$

d)

$$(11\ 111 - 11) : 111 = 100$$

$$(99\ 999 - 99) : 999 = 100$$

Peťa

Úloha 4.

Kolik minut denně svítí na těchto hodinkách alespoň jedna dvojka?

Řešení podle Nely:

- Na 1. místě bude dvojka svítit 240 minut (od 20:00 do 23:59).
- Na 2. místě dvojka svítí 180 minut (od 2:00 do 2:59, od 12:00 do 12:59, od 22:00 do 22:59); ale interval od 22:00 do 22:59 je už započítaný na 1. místě, takže počítáme jen 120 minut. U dalších míst proto uvažujeme jen zbylých 18 hodin.
- Na 3. místě svítí dvojka každou hodinu 10 minut (od **:20 do **:29); celkem $18 \times 10 = 180$ minut.
- Na 4. místě svítí dvojka v každé hodině šestkrát po 1 minutě (02, 12, 22, 32, 42, 52), započteme však pouze 5 minut, neboť minuta **:22 je již započtena v předchozím odstavci; celkem $18 \times 5 \times 1 = 90$ minut.

Aspoň jedna dvojka svítí za celý den $240 + 120 + 180 + 90 = 630$ minut, tj. 10 hodin 30 minut.

Vítek

Úloha 5.

Ze skladu vyjelo nákladní auto rychlostí 40 km/h. O hodinu a půl později ze stejného skladu stejným směrem vyjelo osobní auto rychlostí 70 km/h. Za jak dlouho a kolik km dojede auto nákladní vůz ?

$$\begin{array}{l}
 t_1 = x \\
 v_1 = 40 \text{ km/h} \\
 \hline
 v_2 = 70 \text{ km/h} \\
 t_2 = x - 1,5 \\
 \hline
 S_1 = S_2 \\
 v_1 t_1 = v_2 t_2 \\
 40x = 70 \cdot (x - 1,5) \\
 40x = 70x - 105 \\
 -30x = -105 \\
 x = 3,5 \text{ h} \\
 \hline
 t_2 = 3,5 - 1,5 \\
 t_2 = 2 \text{ h} \\
 S_2 = 2 \cdot 70 \\
 S_2 = 140 \text{ km}
 \end{array}$$

Princezna dojede kočár za 2 hodiny a 140 km od zámku.

Ondra

Úloha 6.

V kině je několik řad sedadel. Víte, že v první řadě jsou 2 sedadla a v poslední je sedadel 32. Víte, že součet všech sedadel v sále je roven 187. Dále víte, že s každou další přibývajícím řadou, vzroste počet sedadel v té řadě o stejné číslo. Určete, kolik je řad sedadel a kolik sedadel přibude s každou další řadou. (Počet sedadel kina v řadách tvoří aritmetickou posloupnost, viz pomocníček).

Řešení:

Nejdříve si vypíšeme všechno, co víme pomocí aritmetické posloupnosti, jak nám radí zadání:

- V první řadě jsou 2 balvany, tedy $a_1 = 2$.
- V poslední řadě je balvanů 32, tedy $a_n = 32$.
- Součet všech balvanů v jeskyni je 187, tedy $S_n = 187$.
- Kolik je řad balvanů, tedy $n = ?$
- Kolik balvanů přibude s každou další řadou, tedy $d = ?$

Poté si vypíšeme vzorečky, které by nám mohly s řešením úlohy pomoci, a dosadíme za ně hodnoty a vypočítáme je:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad (1)$$

Dosaďme $S_n = 187$, $a_1 = 2$, a $a_n = 32$:

$$187 = \frac{n(2 + 32)}{2}$$

$$374 = n \times 34$$

$$n = \frac{374}{34}$$

$$n = 11$$

V jeskyni je 11 řad balvanů.

Pro výpočet d použijeme vztah:

$$a_n = a_1 + d(n - 1) \quad (2)$$

Dosaďme $a_n = 32$, $a_1 = 2$, a $n = 11$:

$$32 = 2 + d(11 - 1)$$

$$30 = 10d$$

$$d = 3$$

S každou řadou přibudou 3 balvany.

Matěj

Výsledkové listiny

6. ročník

	<i>jméno</i>	<i>příjmení</i>	1	2	3	4	5	6	S	Σ
1.	Patrik	Nedvěd	5	-	5	8	-	5	23	76
2.	Kristýna	Janečková	-	-	3	8	9	0	20	58
3.	Filip	Chrástek	-	-	-	-	-	-	0	3

7. ročník

	<i>jméno</i>	<i>příjmení</i>	1	2	3	4	5	6	S	Σ
1.	Jan	Srch	5	6	7	8	9	5	40	109
2.	Amálie	Matyášková	-	-	-	-	-	-	0	30
3.	Tereza	Nováčková	-	-	-	-	-	-	0	21
4.	Amálie	Škarková	-	-	-	-	-	-	0	19
5.	Martin	Lindovský	-	-	-	-	-	-	0	16
6.	Zaynab	Ghaleb	-	-	-	-	-	-	0	15
7.	Ema	Děrgelová	-	-	-	-	-	-	0	13
8.-10.	Matěj	Adamčík	-	-	-	-	-	-	0	11
	Kateřina	Demlová	-	-	-	-	-	-	0	11
	Ema	Gavendová	-	-	-	-	-	-	0	11
11.	Matěj	Dvořák	-	-	-	-	-	-	0	9
12.	Rozálie	Vrkočová	-	-	-	-	-	-	0	8
13.-14.	Ema	Harvey	-	-	-	-	-	-	0	7
	Elizabet	Šimková	-	-	-	-	-	-	0	7
15.	Veronika	Martinásková	-	-	-	-	-	-	0	4
16.	Johana	Mužná	-	-	-	-	-	-	0	0

8. ročník

	<i>jméno</i>	<i>příjmení</i>	1	2	3	4	5	6	S	Σ
1.	Kryštof	Sívek	5	5	4	8	9	5	36	116
2.	Dan	Školař	-	-	-	-	-	-	0	40
3.	Amálie	Štiková	-	-	-	-	-	-	0	7
4.	Štěpán	Skřítecký	-	-	-	-	-	-	0	0

9. ročník

	<i>jméno</i>	<i>příjmení</i>	1	2	3	4	5	6	S	Σ
1.	Lucie	Kuzníková	5	6	4	3	9	0	27	93