KOKOS

33. ročník ⋆ 5. leták

Milý řešiteli, dostává se Ti do rukou předposlední, pátá série tohoto školního roku. Jedná se tedy o Tvou poslední šanci získat body! Aprílové počasí si s námi nejspíš bude hrát ještě dlouho, a tak neváhej a až zase bude škaredě, dej se do řešení. Navíc nezapomeň omrknout náš nový instagram Kokos_bilovec. Přejeme Ti hodně úspěchů při řešení!

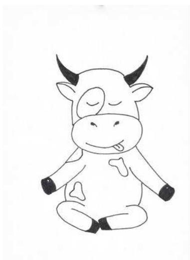
Organizátoři

Zadání úloh

„Slyšíte to taky?“ ozvala se Katka. Odněkud z venku se ozývalo pravidelné chrápání. Naštěstí včera usnuli velmi brzy, a tak nikomu nedělalo větší problémy vstát už za svítání. O to víc už se chtěli vzdálit, když museli poslouchat zvuky připomínající nemocného medvěda. Brzké sluneční paprsky se odrážely v kapkách deště, které líně stékaly po plachtě stanu. Děti by možná strávily jejich obdivováním více času, kdyby je však nezaskočila přítomnost někoho chrápajícího. Minulý večer už asi přes dopadající déšť neslyšeli nikoho přijít. Cizí fialový stan nepravidelného tvaru byl postaven jen pár metrů od toho jejich. Na takovou vzdálenost dokázali docela dobře odhadnout jeho velikost a začali jej porovnávat se svým příbytkem.

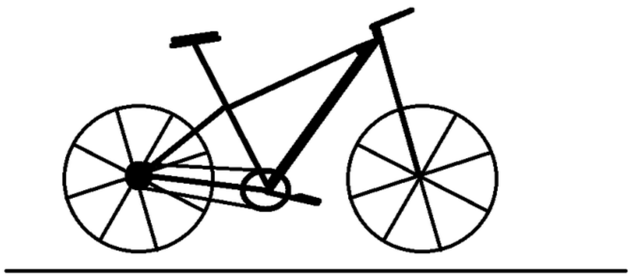
Úloha 1. (5 bodů): Označme kolíky upevňující stan s podstavou pravidelného osmiúhelníku A, B, C, D, E, F, GaH. Vypočtěte obsah tohoto osmiúhelníku, jestliže délka úhlopříčky čtverce tvořeného spojením bodů, které vznikly protnutím úseček $AF, BE, HCaGD$, je $\sqrt[2]{18}$.

Slunce už se celé přehouplo přes obzor, když se celá parta vydala s tatrankou v ruce vstříc dalším kilometrům. Za chvilku už bylo slyšet místo chrápání jen čvachtání bahna pod nohama. Když došli na konec lesa, rozprostřela se před nimi scenérie jako z westernového filmu. Mnohahektarové louky byly plné dobytka a koní, dokonce snad zahlédli i mulu. Za ohradami stál obrovský statek se dřevěným seníkem. Chyběli už jen kovbojové.



KoKoS, Gymnázium Mikuláše Koperníka, 17.listopadu 526, 743 11 Bílovec

„Koukněte na tohle,“ ozval se Štěpa ukazovav na nenápadný leták připnutý na kůlu od plotu. Nápis jim toho zrovna moc neřekl: „Tour de Hvozdíkov, cyklistický závod pro otrlé jezdce“. I tak ale Štěpán vypadal docela zaujatě. „Půjdeme se podívat?“ přidal se k přemlouvání děvčat i Vojta. Když vtom kolem nich prosvištěli z kopce tři usměvaví cyklisté se startovními čísly. A všichni na starých kolech, snad ještě po praprarodičích. Už tohle bylo samo o sobě dosti zajímavé, a proto se nakonec dohodli na návštěvě Hvozdíkova.

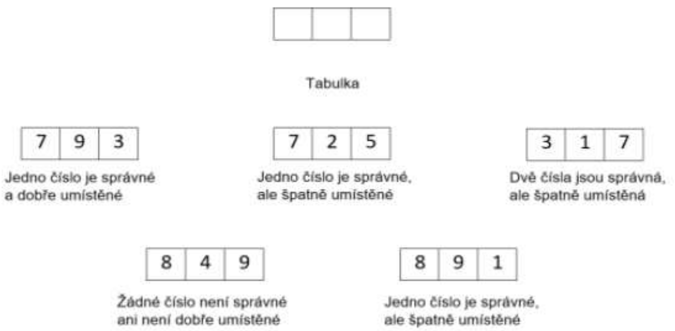


Úloha 2. (7 bodů): Když procházeli po úzké pěšince mezi ohradníky, všimli si, že na některých sloupcích jsou vyrytá čísla. Počet vyrytých čísel na kůlech se postupně zvyšoval, postupně viděli tyto kombinace:
1
1 1
2 1
1 2 1 1
1 1 1 2 2 1
3 1 2 2 1 1
1 3 1 1 2 2 2 1
1 1 1 3 2 1 3 2 1 1 (všechna čísla jsou vždy zapsána ve stejném pořadí jako na ohradníku).

Vypadalo to, že je v tom nějaký fígl. Devátý kůl byl ale rozlomený, a tak nebylo možné čísla přečíst. Jaká čísla do něj byla původně vyryta?

V Hvozdíkově bylo rušno, a to neodbila ještě ani devátá hodina. Náměstí bylo přeplněné rodinami a přáteli závodníků. Mezi nimi se prodírali organizátoři akce snaživše se zajistit co nejhladší průběh . Jeden z nich se teď snažil pomoci jedné z účastnic.

Úloha 3. (7 bodů): Už poněkud starší závodnice, paní Jiřická, zapomněla kód od zámku kola. Měla naštěstí vypsaný tahák, ze kterého se dal trojmístný kód s trochou šikovnosti vypočítat.



Děti jim hned běžely pomoct, přece jen je využití nabytých matematických zkušeností v praxi velmi lákalo. Jak se jim podařilo zámek odemknout?

Naštěstí se jim kolo podařilo odemknout včas. Paní Jiřická už na ně za několik minut mávala od startu. Ještě předtím se jí ale podařilo vlepit jim do ruky padesátikorunu, aby si prý koupili něco na jídlo. Náměstí přetékalo stánky s všemožnými pochutinami. Dlouho se nemohli pro nic rozhodnout, ale nakonec si vybrali makové koláčky.

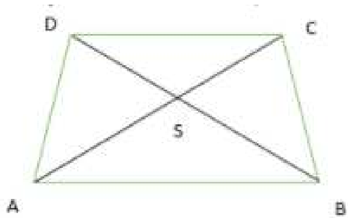
Úloha 4. (8 bodů): Vojta se nudil a na okraj svého koláčku o průměru 8 cm vyznačil dvanáct stejně vzdálených bodů. Potom si představil, že spojí některé z nich a vytvoří úsečky s koncovými body 3 - 12, 3 - 7, 7 - 9 a nakonec 9 - 12. Jaký obsah by měl vzniklý čtyřúhelník?

Děvčata ale stejně pořád honila mlsná, a tak se ještě šla podívat do tamní samoobsluhy, jestli jim něco nepadne do oka.

Úloha 5. (7 bodů): Děvčata si koupila čokoládovou bonboniéru. Krabička byla ve tvaru kornoutu vysokého 46,5 cm, otevřená část měla poloměr 8 cm. Bonbon měl tvar koule o poloměru 1 cm. Kolik bylo v krabičce bonbonů, když 50 % prostoru tvořily mezery?

Naštěstí je po několika bonbonech přešla chuť na sladké, protože kdyby je snědli všechny, asi by už ten den nikam daleko nedošli. Raději znovu nahodili krosny na záda a s dobrou náladou a novými zážitky pokračovali za městečko. Byl to ve všech ohledech velmi příjemný den. Počasí se po včerejšku umoudřilo, měkké sluneční světlo je hladilo po tvářích a vítr cuchal vlasy. Před nimi se jako had kroutila vyšlapaná pěšinka, všude kolem rostly keříky plné borůvek. Vyndali si ešusy a začali sbírat tak zarputile, že si ani nevšimli, že už nejdou mezi loukami, ale v bukovém lese. Až najednou Katka zvedla hlavu: „Podívejte, jsou tu všude nějaké papírky!“ A opravdu, na každém desátém stromu byl připnutý papír. Vypadalo to jako nějaká táborová hra. Na jednom z nich byla docela zajímavá geometrická úloha.

Úloha 6. (6 bodů): Je dán lichoběžník ABCD. Určete velikosti jeho úhlopříček, je-li bod S jejich průsečík a zároveň platí: $|AB| = 12$ cm, $|CD| = 10$ cm, $|AS| = 7$ cm a $|BS| = 6$ cm.



Bez papíru a tužky se jim délky úhlopříček nepočítaly snadno, nakonec však na řešení úlohy přišli. Po cestě vyřešili ještě pár takových příkladů, až se dostali z lesa. Čekal je nejtěžší úsek trasy…

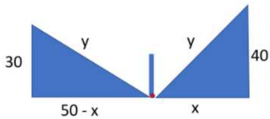
*Řešení úloh 5. série posílejte do **27.5.2021** na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 11 Bílovec

Autorská řešení 4. série

Úloha 1.

Vzdálenost věží je ze zadání 50 metrů. Když označíme vzdálenost vyšší věže od



sloupu jako x, vzdálenost druhé věže a sloupu bude $50 - x$. Délku kuželů světla označíme jako y (byly stejně dlouhé).
Nyní můžeme sestavit dvě rovnice za pomoci Pythagorovy věty (budeme předpokládat, že jsou věže postaveny kolmo k zemi).

$$30^2 + (50 - x)^2 = y^2$$

$$40^2 + x^2 = y^2$$

Vidíme, že se pravé strany rovnic navzíjem rovnají. Za pravou stranu první rovnice můžeme dosadit levou stranu rovnice druhé.

$$30^2 + (50 - x)^2 = 40^2 + x^2$$

Rovnici zjednodušíme umocněním a sečtením jednotlivých členů, musíme si dát pozor, abychom člen $(50 - x)^2$ umocnili správně. Pozor, nesmíme umocnit jako $50^2 - x^2$! Dále upravíme pomocí ekvivalentních úprav.

$$900 + 2500 - 100x + x^2 = 1600 + x^2$$

$$1800 = 100x$$
$$x = 18$$

Nyní už jen dosadíme nám již známou hodnotu x do rovnice $50 - x$.

$$50 - x = 32$$

Vzdálenost nižší věže od sloupu je 18 m a vzdálenost vyšší věže od sloupu je 32 m.

Peťa

Úloha 2.

Každý z 20 vrcholů je spojený s ostatními devatenácti vrcholy jedním stehem. To je celkem $20 * 19 = 380$ spojení. Nezapomeňme však, že jsme každý vrchol započítali dvakrát. Proto je celkový počet stehů roven 190.

Kuba

Úloha 3.

Pro pět po sobě jdoucích přirozených čísel platí, že každé z čísel musí být o 1 menší než číslo jemu následující. Proto při obecném zápisu součinu Eliščiných čísel můžeme použít neznámou x a dostaneme se k $(x-2)*(x-1)*x*(x+1)*(x+2)$. Je-li Štěpánovo nejmenší číslo ještě o jedna menší než Eliščino, platí pro součin jeho pěti po sobě jdoucích přirozených čísel zápis $(x-3)*(x-2)*(x-1)*x*(x+1)$. Protože se jedná o přirozená čísla, musí být x větší než 3. Ze zadání víme, v jakém jsou součiny poměru.

$$[(x-2)*(x-1)*x*(x+1)*(x+2)]/[(x-3)*(x-2)*(x-1)*x*(x+1)] = 6/5$$

Zlomek v pravé části rovnice krátíme, dokud se nedostaneme na tvar:
$(x+2)/(x-3) = 6/5$

Upravujeme dále pomocí ekvivalentních úprav:

$(x+2)/(x-3) = 6/5 \qquad /x-35$

$5x+10 = 6x-18 \qquad /-5x+18$

$x = 28$

Vychází nám $x = 28$, podmínka $x4$ je zachována. Nejmenší Eliščino číslo je dle našeho zápisu:
$x-2 = 26$

Největší Štěpánovo číslo bude:
$x+1 = 29$
Součet těchto dvou čísel je 55.

$26 + 29 = 55$

Peťa

Úloha 4.

Nejdříve vypočítáme nejmenší společný násobek čísel 2 až 10.
$\mathrm{nsn}(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) = 2 * 5 * 3 * 3 * 2 * 2 * 7 = 2520$

Víme, že ve městě žije přibližně 10 000 lidí, hledáme tedy násobek čísla nsn= 2520 blízký 10 000. $42520 = 10080$

Abychom dostali zbytek po dělení číslem k o 1 menší než dělitel, musí být dělené číslo o 1 menší než n-násobek čísla k. Město má 10 079 obyvatel.

Adél

Úloha 5.

Ze zadání víme, že v první nádobě je jeden díl vody, ve druhé dva díly vody a ve třetí čtyři díly. Abychom dál mohli snadno odebírat vodu z jednotlivých nádob, rozdělíme každý z dílů na šest šestin. V první nádobě bude 6 dílků, ve druhé 12 a ve třetí 24 dílků vody. Nyní přelijeme do čtvrté nádoby 3 dílky z první, 4 dílky ze druhé a 6 dílků ze třetí nádoby. To je celkem 13 dílků, které odpovídají 26 litrům. Jeden díl odpovídá 2 litrům vody. Původně tedy bylo 12 litrů v první nádobě, 24 litrů ve druhé nádobě a 48 litrů ve třetí nádobě, tj. dohromady 84 litrů vody.

Vojta

Úloha 6.

Čísla $2, 3, 5$ a 7 jsou prvočísla. Čísla kartiček, která jimi nebudou dělitelná musí být teda součinem alespoň jednoho jiného prvočísla a čísla 1. Další prvočíslo v řadě je 11. Pokud bychom jej ale umocnili (součin co nejmenšího vyhovujícího prvočísla s co nejmenším prvočíslem), dostaneme $(11 * 11) = 121$. To je však větší než 100, takže nesplňuje podmínku. Zbyde nám tedy jen součin prvočísla menšího než 100 $(11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89a97)$ a čísla 1. Abychom splnili i poslední podmínku zadání, musíme vyškrtnout všechna čísla s ciframi $2, 3, 5a7$. Chybí tedy karty s čísly $1, 11, 19, 41, 61$ a 89–6 karet.

Adél

Výsledkové listiny

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Honza	Polách	7	6	7	6	6	8	40	79

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Šimon	Koliščák	-	-	-	-	-	-	0	49
2.	Marie	Sabolová	-	-	-	-	-	-	0	29
3.	Dominik	Müller	-	-	-	-	-	-	0	20
4.	Markéta	Šípová	-	-	-	-	-	-	0	8

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Martina	Černá	5	6	7	6	6	6	36	138
2.	Gabriel	Provazník	7	6	7	6	6	6	38	137
3.	David	Felzmann	-	3	7	6	6	8	30	116
4.	Josef	Kroček	7	6	7	0	6	8	34	34
5.	Michal	Maděřič	-	-	-	-	-	-	0	22
6.	Barbora	Zapletalová	-	-	-	-	-	-	0	5

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Matyáš	Burda	7	6	7	6	6	8	40	157
2.	Viktor	Gola	7	6	7	6	6	8	40	156
3.	Pavla	Šimová	7	6	7	6	6	8	40	150
4.	Milan	Holotňák	7	6	7	6	6	8	40	149
5.	Václav	Verner	7	6	5	0	6	8	32	146
6.	Linda	Tománková	7	6	7	6	6	8	40	142
7.	Natálie	Vylamová	7	6	7	4	6	8	38	137
8.	Robert	Kubányi	7	6	-	6	6	6	31	94
9.	Zuzana	Hauznerová	-	-	-	-	-	-	0	72
10.	Michaela	Živná	-	-	-	-	-	-	0	62
11.	Emma	Rikanová	-	-	-	-	-	-	0	45