KOKOS

33. ročník ⋆ 4. leták

Zima už se pomalu chýlí ke konci, ale zbývá ještě několik dlouhých večerů. Bohužel letos nemůžeme uspořádat žádné soustředění ani víkendovku, ale aby ses doma nenudil, připravili jsme pro Tebe a ostatní řešitele KoKoSu další sérii. Tak už na nic nečekej a pusť se do řešení!

Organizátoři

Zadání úloh

„To už vážně musíme vstávat?“ naříkal Vojta, zatímco ho Eliška tahala z postele. Čekal je další dlouhý den. Měli před sebou ještě spoustu kilometrů, a tak nezbývalo, než je zase pomalu začít ukrajovat. Všichni čtyři se rozloučili s babičkou a vyrazili na cestu.

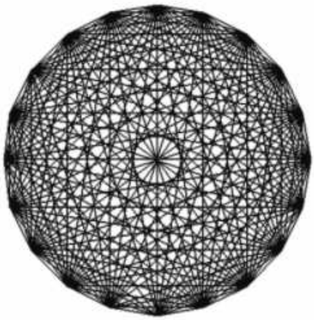
Už po pár kilometrech však zjistili, že něco není v pořádku. Vždyť už pěknou chvíli nepotkali žádnou značku. Štěpán vytáhl mapu a začali hledat, kde jsou. „Hele, tohle je ta vesnice, ze které jsme vycházeli. Po zelené, kolem rybníka, jak všude byli komáři,“ začal se zase všude drbat Vojta. „Koukněte, někde poblíž by tu měl být hrad, ne? Když půjdeme tímhle směrem pořád do kopce, nemůžeme ho přece minout,“ snažila se Katka vyřešit situaci. Hodiny strávené orientací v mapě se vyplatili. Zanedlouho se před nimi opravdu objevily hradby.

Úloha 1. (7 bodů): Štěpán s Vojtou vylezli na vrcholy dvou hradních věží. Věže od sebe byly vzdáleny 50 m. Věž, na kterou vylezl Štěpa, byla 30 metrů vysoká a druhá, ze které Vojta urputně mával na obě děvčata, byla vysoká 40 metrů. Protože ještě bylo trochu šero, oba svítili malými baterkami na stejné místo podstavce sloupu stojícím mezi věžemi. Oba kužely světla byly stejně dlouhé. Jak byl sloup vzdálený od první a od druhé věže?

Holky se mezitím jaly prozkoumávání okolí. Hned u vstupu měli několik informačních cedulí vysvětlujících tehdejší poměry. Při čtení je ale najednou vyrušila jakási paní. Byla oděná do dlouhých bílých šatů s výraznou výšivkou. Dívky se s ní daly na chvíli do řeči a pořádně probraly všechno od šití až po vaření guláše. Řeč přišla i na onen symbol na šatech.

KoKoS, Gymnázium Mikuláše Koperníka, 17.listopadu 526, 743 11 Bílovec

Úloha 2. (6 bodů): Symbol magické růže se skládá z 20 hlavních vrcholů. Každý vrchol je propojený s ostatními pomocí jednoho stehu. Kolik stehů bylo potřeba k jeho vyšití? (Stehy na rubu nepočítejte.)



To už se ale kluci vrátili z věží a museli se rozloučit. Cesta z hradu se mírně stáčela mezi vzrostlými buky, i počasí bylo jedno z nejlepších na dlouhé chození. Posilnili se čokoládou s oříšky, aby měli dost sil na výstup na hřeben. Při prudkém stoupání sice předběhli několik dalších turistů, ale taky se u toho pořádně zapotili. "Už žádný kopec prosím! Bolí mě nohy," naříkal Vojta. Měl totiž nejtěžší batoh - jako nejsilnější musel nést stan. Turistická značka naštěstí pokračovala mírnou pěšinkou, a tak měli i chuť si povídat. Když už měli dost Zvířátek i Kontaktu, vymyslela Eliška se Štěpánem rébus.

Úloha 3. (7 bodů): Eliška vynásobila pět po sobě jdoucích přirozených čísel a dostala číslo A. Štěpán vynásobil 5 jiných po sobě jdoucích přirozených čísel a dostal číslo B. Štěpovo nejmenší číslo bylo o 1 menší než Eliščino nejmenší číslo. Jaký je součet Eliščina nejmenšího a Štěpánova největšího čísla, pokud víme, že je poměr A:B roven 6:5 ?

Řešení jim nějakou tu chvilku zabralo a cesta utíkala rychle. Než se nadáli, rozprostíralo se před nimi malé podhorské městečko. Už z dálky viděli dřevěný kostel, kterým bylo město proslulé na míle daleko. Na náměstí pak nakoupili chleba, jablka a tatranky na další dny. V malé samoobsluze je uvítal veselý pán. Byl podsadité postavy, pod košilí se mu rýsovalo pivní bříško, ale jinak vypadal velmi čile a červená líčka prozrazovala dobré zdraví. Představil se jako Rosťa Bouček, tamní místostarosta. Rozpovídal se o historii města, každoročních svátcích jara i o obyvatelích. Nadchlo ho, že jsou děti zarytí matematici, a proto jim neřekl přesný počet, ale jen ho v pár větách naznačil.

Úloha 4. (6 bodů): Ve městě žije přibližně 10 000 obyvatel. Pokud počet obyvatel vydělíte 10, dostanete zbytek 9, pokud ho vydělíte 9, dostanete zbytek 8 a tak dále až do dělení 2 se zbytkem 1. Kolik obyvatel má městečko?

Protože ani tohle pro ně nebyl žádný tvrdý oříšek, úlohu snadno rozlouskli. Spokojení, s plnou náručí jídla, vyšli s úsměvy na tvářích ven z obchodu. Slunce už se dávno přehouplo přes zenit a do tmy nezbývalo moc času. Aby toho nebylo málo, vypadalo to, že se žene nějaká bouřka. Pospíchali rychle za město, aby došli ještě suší na vyhrazené tábořiště. Procházeli totiž rezervací. Při odchodu si Katka ještě stihla všimnout, jak tamní zahradník přelévá vodu ze sudů, aby měl místo pro další dešťovou vodu.

.

Úloha 5. (6 bodů): Zahradník sbírá vodu do čtyř soudků. V prvních třech je voda, čtvrtý je prázdný. Ve druhém je dvakrát více vody než v prvním, ve třetím je dvakrát více vody než ve druhém. Do čtvrté nádoby přelil polovinu vody z první nádoby, třetinu vody z druhé nádoby a čtvrtinu vody ze třetí nádoby. Ve čtvrté nádobě má nyní 26 litrů vody. Kolik vody je dohromady ve všech nádobách?

Už byli určitě za půlkou, když celá obloha zčernala a z nebe se začaly zvolna snášet sněhové vločky. Ještě přidali do kroku a za dvacet minut už promoklí stavěli stan. Konečně byli v suchu. Venku zuřila vichřice, pršelo skoro vodorovně, prostě počasí, že by psa nevyhnal. Vyždímali si mokré ponožky, nabalili na sebe teplé bundy a zachumlali se do spacáků. Kluci se jako správní džentlmeni jali přípravy večeře, s největší opatrností ve stanu ohřáli vodu a zalili kuskus se zeleninou. Nemohli si víc pochutnat! Holky zatím chtěly nachystat hru na večer, ale zjistily, že jim chybí některé kartičky.

Úloha 6. (8 bodů): Hra se skládá z kartiček s čísly od 1 do 100. Několik se ztratilo, ale děti zjistily, že žádné z nich není dělitelné 2, 3, 5 a 7 a ani žádnou z těchto číslic neobsahuje. Jaký počet kartiček je ztracený a které to jsou?

Po jídle už se nikdo z nich nepřinutil jít si ven vyčistit zuby, a tak aspoň vypili pár doušků vody, aby se neřeklo. Hru si zahrát nemohli, navíc byli po celém dni unavení, a proto zhasli a šli za bubnování deště spát.

Řešení úloh 4. série posílejte do ***7.4.2021*** *na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 11 Bílovec

Autorská řešení 3. série

Úloha 1.

Cukru je potřeba 50x více gramů než kusů vajec:
$50.6 = 300$ g
Mouky potřebujeme o sto gramů méně než dvojnásobku cukru:
$300.2 - 100 = 500$ g
Máku má být o tři sta gramů méně, to je 200 gramů. V každé hlavičce najdeme 2 g máku:
$0.02 \times 100 = 2$ g
Je potřeba sesbírat 100 hlaviček máku.

Eliška

Úloha 2.

Setinu procent, o které byli medvídci zlevněni, označíme jako M.

První zlevnění: $200–200 \times M$

Druhé zlevnění: $(200–200 \times M)–(200–200 \times M) \times M$ Ze zadání víme, že je tento výraz je roven 72 korunám. Po roznásobení a odečtení jednotlivých členů rovnice dostaneme kvadratickou rovnici

$200–200 \times M–200 \times M + 200 \times M2 = 72$,
Po další ekvivalentní úpravě pak $M2 - 2 \times M + 16/25 = 0$.
$25M^2–50M + 16 = 0$
$(5M–2) \times (5M–8) = 0$

Součin je nulový, je-li alespoň jeden z činitelů nulový.

$M = 2/5 \ldots 0,4 \ldots 40\%$

$M = 8/5 \ldots 1,6 \ldots 160\%$

Sleva 160 % nedává smysl, medvědi byli tedy na podzim zlevněni o 40 %.

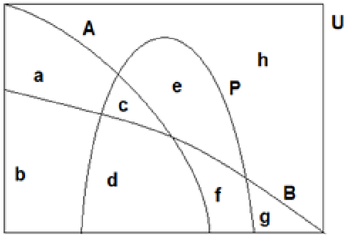
Magda

Úloha 3.

Pro vyřešení tohoto příkladu vytvoříme Vennův diagram. Množiny označíme A, B a P podle jmen štěňat.

Nyní dáme dohromady diagram a informace, které známe z textu:

$a + b + c + d = 71$



$b + d + f + g = 67$
$c + d + e + f = 39$
$h = 0$
$d = 16$
$b + d = 48$
$c + d = 24$
$b + c + d + e + f + g = 81$

Do rovnic o dvou a více neznámých postupně doplníme vše, co jsme zjistili, a vyjádříme další neznámé:

$b + 16 = 48, b = 32$
$c + 16 = 24, c = 8$
$a + 32 + 16 + 8 = 71, a = 15$

Když dosadíme do zbylých 3 rovnic a upravíme je, zbyde nám:

$f + g = 19$
$e + f = 15$
$e + f + g = 25$

Z těchto rovnic tedy získáme poslední 3 neznámé. Dohromady šli na 96 procházek a vzhledem k tomu, že chodí na 2 procházky denně, pejsky má 48 dní.

Adél

Úloha 4.

Vytvoříme tabulku se všemi možnostmi pro každého z bratrů. Ze zadání jasně můžeme zaznačit, že Karel nemá rád matematiku. Pokračujeme Honzovým oblíbeným dnem a věkem. Jáchym má nejraději neděle, ze dnů zbyde na Karla pátek. Víme však, že nejmladší bratr pátky rád nemá, proto bude Karel nejstarší. Jáchym, jako nejmladší, má rád tělocvik.

Karel	~~8, 10~~, 12 ~~matematika, tělocvik~~, zeměpis pátek, ~~sobota, neděle~~
Jáchym	8, ~~10, 12~~ ~~matematika,~~ tělocvik, ~~zeměpis~~ ~~pátek, sobota,~~ neděle
Honza	~~8~~, 10, ~~12~~ matematika, ~~tělocvik, zeměpis~~ ~~pátek~~, sobota, ~~neděle~~

Amálka

Úloha 5.

Pokud množství oříšků, které dostal Vojta, označíme x, potom Eliška dostala $2x$ oříšků a Štěpán $3x$ oříšků.

- Pizizubka snědla $x/2$ oříšků.
- Zrzečka snědla $2x/3$ oříšků.
- Šeděnka snědla $3x/4$ oříšků.

Dětem dohromady zbylo 196 oříšků.

Všechny hodnoty zapíšeme do jedné rovnice, kdy na jedné straně budeme mít konečný počet oříšků a na druhé straně původní počet oříšků všech dětí minus počet oříšků které snědly.
$196 = x - x/2 + 2x - 2x/3 + 3x - 3x/4$
Zlomky převedeme na stejného jmenovatele a pomocí ekvivalentních úprav rovnici dostaneme do tvaru: $x = 48$
Vojta dostal 48 oříšků, Eliška $2{\times}48 = 96$ oříšků a Štěpán $3{\times}48 = 144$ oříšků

Silva

Úloha 6.

Sestrojte úsečku dané délky a podrobně popište postup konstrukce.

a) $\sqrt[2]{8}$

b) $\sqrt[2]{13}$

c) $a\sqrt[2]{3}$, $a =$ délka libovolné úsečky

Řešení a):
Využijeme Pythagorovu větu. Zadanou odmocninu zapíšeme jako odmocninu z rozdílu (či součtu) dvou mocnin. V tomto případě zvolíme čísla 3 a 1. $(9 - 1 = 8)$
$\sqrt[2]{8} = \sqrt[2]{3^2 - 1^2}$

Dále si uvědomíme, které číslo je nejvyšší. V tomto případě je to číslo 3. Když narýsujeme pravoúhlý trojúhelník s jednou odvěsnou délky 1 cm a s přeponou délky 3 cm, druhá odvěsna podle PV musí vyjít úsečka o délce odmocniny z osmi.

Postup konstrukce a):
Narýsujeme úsečku $|AB| = 3$ cm. Poté sestrojíme Thaletovu kružnici k k přeponě AB (kružnice k se středem S, S je střed úsečky AB, poloměr roven vzdálenosti

AS). Dále vedeme z bodu A oblouk kružnice l, r = 1 cm. V bodě, kde se tato kružnice protne s Thaletovou kružnicí, se nachází bod C. Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník ABC, kde pravý úhel je u vrcholu C. Podle PV je $|BC| = \sqrt[2]{8}$

Řešení b):
Opět zadanou odmocninu vyjádříme jako odmocninu z rozdílu či součtu dvou mocnin. Tentokrát to budou mocniny čísel 2 a 3.$(4 + 9 = 13)$
$\sqrt[2]{13} = \sqrt[2]{2^2 + 3^2}$

Z těchto čísel je největší $\sqrt[2]{13}$, tudíž bude přeponou. Narýsujeme tedy pravoúhlý trojúhelník DEF s pravým úhlem u vrcholu F. Délky odvěsen jsou 2 a 3 cm.
$|ED| = \sqrt[2]{13}$

Řešení c):
Ze zadání víme, že naše hledaná úsečka $x = a\sqrt[2]{3} \rightarrow x/a = \sqrt[2]{3}/1$
Narýsujeme dvě libovolné různoběžky, jejich průsečík označíme P. Na jednu z nich naneseme velikost libovolné úsečky a kdy bod P je jedním z krajních bodů. Druhý krajní bod pojmenujeme např. Q. Vznikne tedy úsečka PQ. Na druhé z přímek vyznačíme bod O tak, že $|PO| = 1$ cm. Vznikne nám úsečka PO.

Body Q a O spojíme. Na přímku PO naneseme bod R tak, že $|PR| = \sqrt[2]{3}$ a $O \in PR \rightarrow$ tu získáme obdobně jako v případě a) pomocí pravoúhlého trojúhelníku o délkách stran $1, \sqrt[2]{3}$ a 2 cm. Poté vedeme rovnoběžku s úsečkou OQ procházející bodem R a polopřímkou PQ. V bodě, kde tato rovnoběžka protíná polopřímku PQ, sestrojíme bod S.
$|PS| = a\sqrt[2]{3}$

Verča

Výsledkové listiny

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Honza	Polách	5	6	9	6	5	8	39	39

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Šimon	Koliščák	4	-	-	7	-	-	11	49
2.	Marie	Sabolová	-	-	-	-	-	-	0	29
3.	Dominik	Müller	-	-	-	-	-	-	0	20
4.	Markéta	Šípová	-	-	-	-	-	-	0	8

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Martina	Černá	5	6	4	6	5	8	34	102
2.	Gabriel	Provazník	5	6	9	7	5	8	40	99
3.	David	Felzmann	4	6	-	5	5	-	20	86
4.	Michal	Maděřič	5	4	-	5	0	8	22	22
5.	Barbora	Zapletalová	-	-	-	-	-	-	0	5

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Matyáš	Burda	5	6	9	7	5	8	40	117
2.	Viktor	Gola	5	6	9	7	5	8	40	116
3.	Václav	Verner	5	6	9	7	5	8	40	114
4.	Pavla	Šimová	4	6	9	7	5	8	39	110
5.	Milan	Holotňák	4	6	9	7	5	6	37	109
6.	Linda	Tománková	4	6	-	7	5	8	30	102
7.	Natálie	Vylamová	3	6	9	7	5	8	38	99
8.	Zuzana	Hauznerová	4	4	-	6	1	2	17	72
9.	Robert	Kubányi	4	-	-	7	5	-	16	63
10.	Michaela	Živná	4	3	-	-	-	-	7	62
11.	Emma	Rikanová	-	-	-	-	-	-	0	45