KOKOS

23.ročník ⋆ 5.leták

Blíží se konec školního roku a s ním přichází i poslední KoKoSová série. Ta definitivně rozhodne, kdo se umístí na prvních třech místech a zaslouží si tak pěkné ceny s diplomem. Proto se snaž a ukaž co v tobě je, protože to stojí za to. Ale hlavně si to užij! Přejeme Ti pěkné čtení a počítání.

Organizátoři

Zadání úloh

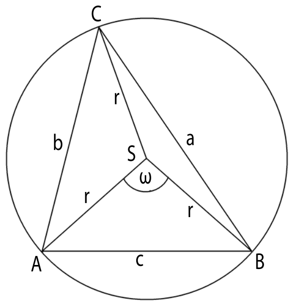
Jestliže se někdy budete pohybovat po Willy, rozhodně si dejte pozor na Polbum. Jeho příchod se projevuje nesnesitelným nárůstem okolní teploty a vrcholí srážkou dvou sluncí. V takovém okamžiku se rozhodně nedoporučuje pobývat v otevřené krajině, zato je přímo žádoucí mít s sebou kus masa, který chcete velice rychle opéct.

Úloha 1. (5 bodů): Zajímalo by vás jak rychle? Ve Willy existuje jednoduchá mnemotechnická pomůcka k zapamatování si přesného počtu sekund potřebných k opečení masa. Představme si číslo s 929 ciframi. Pro toto číslo platí, že jakékoliv dvě po sobě jdoucí cifry tohoto čísla jsou dělitelné třinácti. Víme, že poslední cifra je 2. První cifra udává počet sekund. Vaším úkolem je na ni přijít.

Zatímco vy sami se schováváte v první budově, která se vám připlete do cesty, maso necháte ležet venku před prahem a v mžiku máte křupavou pečínku. Námaha minimální, výsledek velkolepý. Takto se vám může lehce stát, že narazíte na Díru. Na první pohled vypadá obyčejně, avšak když se ponoříte hlouběji, rozprostřou se před vámi nevídané obzory. Ponoření je zde velice důležité, protože přesně to se přihodilo Billymu, když do něj nešikovný Troll omylem strčil. Billymu tak ve vteřině zmizela pevná půda pod nohama a vydán na milost gravitaci se ocitl uprostřed Díry. Vnořen do tmy čekal nutnou pohromu, avšak bolestivý dopad byl vystřídán příjemně sladkou atmosférou Billyho oblíbené cukrárny. A tady někde jsme minule skončili.

Přesně tak, jak si to pamatoval z poslední návštěvy. Bíle natřené stolky se židlemi z ohýbaného dřeva ledabyle rozestavěné po místnosti, která byla tak akorát velká, aby působila útulně a zároveň se všichni mlsouni pohodlně usadili ke své oblíbené pochoutce. Billy se ocitl přímo naproti pultíku se zákusky, za kterým stála stále se usmívající zmrzlinářka.

Úloha 2. (9 bodů): A za stále se usmívající zmrzlinářkou visel podivný obraz. Byla na něm kružnice se středem S a v ní vepsaný trojúhelník. Billyho napadlo, že by mohl zkusit určit poloměr této kružnice pomocí stran a a b trojúhelníku ABC a úhlu ω (viz obr.).



Teď zde však nebylo ani živáčka. Nikdo necinkal lžičkou o talířek a ani se nesnažil zakrýt nově vytvořenou kávovou skvrnu na ubruse. Billy, zaskočen sledem událostí, se neodvažoval konat prudké pohyby, a tak stál přilepený k podlaze a velice pomalu se rozhlížel kolem sebe. Byl si naprosto jist, že ho paměť neklame a na dně obyčejných děr se rozhodně nenacházejí cukrárny. Nebyl by to ale Billy, kdyby se i za takto extrémní situace alespoň koutkem svého vědomí nenacházel v obchodních sférách. Jakmile při svém opatrném průzkumu okolí spatřil automat na žvýkačky, udělalo to v jeho mysli památné Cvak. Kolečka se roztočila, převody zarachotily a na konci velmi náročného pochodu se Billymu znatelně rozzářila očka. Už nebyl ochromen strachem, naopak pružně vyskočil k útoku a vší silou popadl automat. V tu chvíli se cukrárna rozhodla Billyho opustit a vystřídala ji černočerná tma.

Udělalo to spoustu divných zvuků, než se Billy dosti nevybíravým způsobem rozplácl o podlahu. Pryč byla všechna Růžová, Sladká i Voňavá, opět se přemístil do opuštěné budovy, ve které se spolu s Trollem schovali před Polbumem.

Pro Trolla muselo být Billyho zmizení mžikovou záležitostí, protože ještě teď dokončoval svou razantní gestikulaci. Dokonce ještě nestihl doříci slovo, které se pokoušel Billymu sdělit, než jej shodil do Díry. O to větší údiv se v jeho tváři vyloudil po té, co spatřil Billyho s tak roztodivnou věcí, jako je automat na žvýkačky. Pokusil se ve své chabé mysli nalézt to správné slovo, kterým by popsal tu divnou věc, kterou teď Billy svíral v náručí, ale jeho snaha byla marná. Tentokráte však není na vině Trollův omezený intelektuální výkon, ale prostý fakt, že ve Willy nepotřebují výraz pro automat na žvýkačky, když nikdo z místních obyvatel ještě v životě žvýkačku neviděl. Zalapal tedy naprázdno po dechu a s hřmotným Žbuch si sedl na podlahu, aby zaujal vyčkávací postoj.

Jak známo každá činnost Trolla zabere tak dvakrát více času, než průměrně šikovnému člověku, takže zatímco se Troll snažil vyjádřit svůj údiv, byl Billy už dávno na nohou a před očima se mu odvíjel naprosto brilantní plán.

Úloha 3. (7 bodů): Před svým brilantním plánem se však Billy ještě zamyslel nad příkladem. Máme dvě trojmístná čísla. Cifry, ze kterých jsou čísla složena, si označme A a B. První z čísel je ve tvaru ABA, druhé ve tvaru BAB. Kolik naleznete dvojic $[A, B]$ takových, že součet čísel ABA a BAB je dělitelný 74?

Ve svých představách stál jako strýček Skrblík na skokanském můstku a připravoval se ke skoku do ohromné hromady zlatých mincí, které plnily jeho obří trezor. K čertu se všemi počítači, na místní oblůdky to chce něco mnohem jednoduššího, aby byly schopny pochopit, jak úžasnou věc jim člověk předkládá. A kdo kdy měl co proti žvýkačce.

Sladká růžová hmota lepící se všude po zubech, ze které se dají dělat bubliny netušených rozměrů. To vše zabalené v úhledném balíčku, který se vejde každému do kapsy. Ničím jiným než koupí tohoto zázraku neuděláte svým dětem větší radost. Žvýkejte Billyho žvýkačku po každém jídle, zbavte se tak nepříjemného zápachu z úst a snižte riziko zubního kazu... tolik možností, tolik neodolatelných nabídek.

Po třech náročných dnech ve Willy, kdy mu každá další hodina strávená v tomto nepřátelském světě působila stále větší migrénu, se Billy cítil jako znovuzrozený. Nabitý novou energií si vůbec nevšímal nechápajícího Trolla a okamžitě velel k rychlému postupu do vesnice. Trollovi se sice nedostalo žádného vysvětlení ohledně prapodivné krabičky, ale plnit rozkazy to bylo jeho pole působnosti. Nad tím se nemusí moc přemýšlet, to se prostě udělá a hotovo. V tomto si byl Troll jistý. Zapomněl na svou nezodpovězenou otázku, rozrazil dveře a s Billym na ramenou a jeho kufry v rukou se sprintem vydal vstříc strmému kopci.

Úloha 4. (6 bodů): Chcete vědět, kolikastupňový kopec to byl? Představme si hodinový ciferník. Každé z čísel 1, 4, 8 představuje vrchol trojúhelníku. Nejmenší z vnitřních úhlů tohoto trojúhelníku udává sklon kopce ve stupních. Vaším úkolem je tento údaj zjistit (neřešte sestrojením trojúhelníku a naměřením hodnot).

Tím, jak se slunce od sebe zase vzdalovala, začala se okolní teplota vracet ke své normální hodnotě. Je třeba pamatovat, že za normální je třeba považovat teplo, které vyzáří místo obvyklého jednoho hned dvě slunce. I když Troll Billyho nesl svižným krokem vstříc strmému kopci, nenašel se žádný Vánek, který by zchladil Billyho tvář. Ani cesta moc neubíhala, v naprosto monotónní krajině se člověk nemohl upnout k nějakému bodu, ke kterému by se přibližoval, takže jediným způsobem, jak si Billy mohl krátit chvíli, bylo osnování svých obchodních plánů.

Z předchozí zkušenosti ví, že obcházet dům od domu a klepat na dveře nemá cenu. Místní nejsou vůbec zvyklí na takový druh reklamní kampaně a Billy stojící na prahu jejich dveří v nich vyvolává děs a hrůzu. Ne že by oni Billyho neděsili, ale přeci jen on byl zkušený obchodní cestující a za svou praxi si vybudoval řadu triků, jak své polekání nenechat na sobě znát. Počítače díky podomní taktice naprosto vyhořely, pokud nechce ztroskotat i se žvýkačkami, musí být o poznání opatrnější.

Celého upoceného, utrmáceného vedrem a překotnými představami přinesl Troll Billyho až na největší náměstí Softu. Byla to o poznání útulnější městská část, než kterou na protějším kopci tvořil Micro. Domy byly dvakrát tak velké a tu a tam se našlo i místo pro předzahrádku. Ta trocha zeleně ve vyprahlé krajině Billymu okamžitě zvedla náladu.

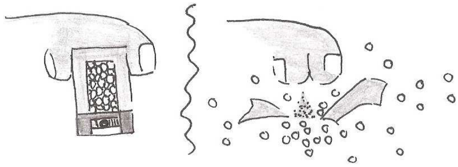
Úloha 5. (6 bodů): A hned ho napadl další příklad. Vymyslel 2 řady čísel:

$$2010, 77, 18, 8, 6, \ldots$$
$$485, 102, 22, \ldots$$

Každé číslo vznikne z toho předchozího užitím stejného pravidla. Doplňte poslední čísla obou řad.

Opláchl si obličej vodou z místní kašny a s nadšením se pustil do svého nového reklamního triku. Půjčil si Trollovu palici a párkrát uhodil do automatu na žvýkačky.

Samozřejmě se nic nestalo a činu se musel chopit Troll. Zlehýnka se dotkl kovové konstrukce stroje a ta se okamžitě rozbila na padrť. Až se Billy vylekal, že i z jeho nového obchodního artiklu nezbude nic jiného než růžové cucky. Naštěstí se žvýkačky jen rozletěly v soustředných kruzích po okolí a Billy je ve chvíli sesbíral.

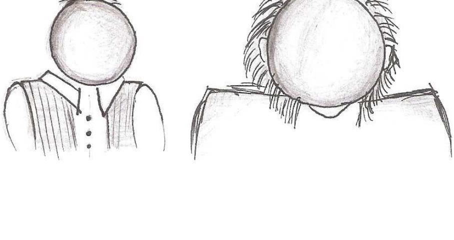


Teď to přijde, ujišťoval v duchu sám sebe. Sedl si ke kašně, rozbalil jeden z balíčků a začal žvýkat. Jako by nic si prohlížel okolní domy a předstíral, že nemá vůbec nic na práci. Troll byl pochopitelně zmaten. Neměl jedinou šanci přijít celé záležitosti na kloub. Na malý okamžik se ho zmocnila dokonce zlost. Tak on se táhne prudkým kopcem obtěžkán zavazadly, podivným cizincem a ještě divnější mašinkou a nakonec je z toho tohle. Lelkování na náměstí. Už už sahal po palici, že si vybije svůj vztek na svém společníkovi, když tu se u Billyho pusy objevilo něco nečekaně úžasného. Nejdříve to bylo malé docela tmavě růžové a postupně se to zvětšovalo a světlalo. Troll uhrančen podívanou nemohl z Billyho spustit oči.

To je ono, jen buď zvědavý, to je to, co od tebe chci, teď jen seber odvahu… Útržkovité myšlenky se v Billyho hlavě mísily se zbožným přáním konečně něco prodat. Nedal však na sobě znát své očekávání a dál jako by nic přežvykoval. To už to Troll nevydržel a vyslovil tu úžasnou větu: „Moh bych já taky dostat.“ „Jasně,“ zněla Billyho rádoby nenucená odpověď, uvnitř však právě vystřelil ohňostroj radosti. Teď, když i Troll byl schopen projevit zájem o jeho zboží, se už nemůže nic pokazit.

Kvůli Trollově velikosti vytáhl rovnou dva balíčky žvýkaček a nabídl je Trollovi. „Hlavně je nesněz, jenom žvýkej,“ zněla Billyho rada před tím, než Troll, jakožto první obyvatel Willy, vyzkoušel žvýkačku. A tak tam seděli a žvýkali. Oba spokojení, Billy díky nově se rozjíždějícímu obchodu, Troll pak z té úžasně sladké a růžové hmoty, která se mu převalovala v ústech.

Úloha 6. (7 bodů): A jako vždy, když je Billy spokojený, si i nyní spočítal matematickou úlohu. Mějme stádo šneků, které se v řadě za sebou plazí rovnoměrnou rychlostí. Billy se snažil přijít na to, jak je řada dlouhá. Ví, že když vystartuje přesně za posledním šnekem v řadě a půjde až k prvnímu šneku stále stejnou rychlostí, udělá 30 kroků o velikosti 1 metr. Když se pak otočí a půjde zase na konec řady v protisměru pohybu šneků, udělá 20 kroků, než se dostane k poslednímu šneku. Jak dlouhá řada šneků to je?



I když náměstí před příchodem Billyho vypadalo naprosto opuštěně, byl to jen krycí manévr místních. Neměli vůbec rádi cizince. Už vůbec neměli rádi cizince, kteří vypadají tak divně jako tamten, co se zrovna rozvaluje u kašny, a Trollové ve městě vždycky dělají paseku. Nelibost k cizincům však je jedna

věc, chorobná zvědavost druhá. Schovaní za záclonkami každý z nich potajmu pozoroval Billyho s Trollem a hlavně tu novou Věc.
Žvýkat se Troll naučil celkem rychle. Problém byl s bublinami. Billy mu stále nemohl vysvětlit princip, jak je třeba žvýkačku umístit v puse a jak fouknout, aby se i Trollovi u pusy objevil růžový balónek. Ke cvičení spotřebovali rovný tucet žvýkaček, ale výsledek stál za to. V okamžiku, kdy se i Trollovi podařilo vykouzlit bublinu, místní nevydrželi a houfem se vrhli na náměstí. Klopýtali jeden přes druhého, jen aby byli u Billyho co nejdříve.

Billy nebyl jediný, kdo si užíval svůj úspěch. Princezna si také spokojeně mnula své drobounké ručičky a těšila se z rozruchu, který se povedlo Billymu do Willy přinést. Celá idylka měla však jeden skrytý háček, a to, onu nenápadnou cedulku u Díry, která jasně stanovovala její použití…

*Řešení úloh 5. série posílejte do **3.6.2011** na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 11 Bílovec

Autorská řešení 4. série

Úloha 1.

1 Odnos	$2 \cdot 3000 = 6000$ m
1. Nosič	1 odnos za 7,5 h
2. Nosič	1 odnos za 5 h
3. Nosič	1 odnos za 2,4 h

$n(7,5;5;2,4) = 60$

Jednotlivé výkony za 60 hodin:

1. Nosič	$8 \cdot 700 = 5600$ plodů
2. Nosič	$12 \cdot 500 = 6000$ plodů
3. Nosič	$25 \cdot 250 = 6250$ plodů

Celkový výkon za 60 hodin $5600 + 6000 + 6250 = 17850$
200 000 : 17 = 11 zb. 3650
$11 \cdot 60 = 660$ hodin ... zbývá dopočíst čas za odnesení zbytku.

Simulace:

Číslo příchozího nosiče	Čas v h	Součet donesených plodů
3	2,4	250
3	4,8	500
2	5,0	1000
3	7,2	1250
1	7,5	1950
3	9,6	2200
2	10,0	2700
3	12,0	2950
3	14,4	3200
2	15,0	3650

Vasil

Úloha 2.

Celkový počet dětí ve škole si označíme jako x, z toho je 55 % chlapců a 45 % dívek. Ve škole tedy bylo $\frac{11}{20}x$ chlapců a $\frac{9}{20}x$ dívek. Dále ze zadání víme, že vlakem jelo 5 % všech chlapců a 15 % všech dívek, tedy $\frac{11}{400}x$ chlapců a $\frac{27}{400}x$ dívek. Ze zadání také vyplývá, že $x \leq 400$. Protože čísla, která udávají počet dívek a chlapců, kteří jeli vlakem a studují ve škole, musí být přirozená, existuje pro x jediné možné řešení, a to $x = 400$. Vlakem tedy jelo 11 chlapců a 27 dívek.

Bára

Úloha 3.

Protože se v zadání 3. příkladu 4. série vyskytla tisková chyba, nebylo příklad, tak jak byl zadán, možné řešit, a z toho důvodu není bodován. Za chybku se velice omlouváme. Původní (správné) zadání i s autorským řešením si můžete prohlédnout níže.

Správné zadání:

$$\begin{array}{ll} 3 \bullet 3{=}9 & 3 \uplus 4{=}5 \\ 5 \bullet 5{=}7 & 3 \uplus 6{=}9 \\ 7 \bullet 7{=}4 & 5 \uplus 7{=}23 \end{array}$$

Neexistuje žádný specifický způsob řešení, snad jenom dobrý nápad.

$$3 \bullet 3 = 3 \cdot 3 = 9$$
$$5 \bullet 5 \ldots\ 5 \cdot 5 = 25 \ldots\ 2{+}5{=}7$$
$$7 \bullet 7 \ldots\ 7 \cdot 7 = 49 \ldots\ 4{+}9{=}13 \ldots\ 1{+}3{=}4$$

Z toho vyplývá: $(8 \bullet 9) \uplus (7 \bullet 8) = 9 \uplus 2$

$$3 \uplus 4 = (3 \cdot 4) - (3{+}4) = 5$$
$$3 \uplus 6 = (3 \cdot 6) - (3{+}6) = 9$$
$$5 \uplus 7 = (5 \cdot 7) - (5{+}7) = 23$$

Z toho vyplývá: $9 \uplus 2 = 7$

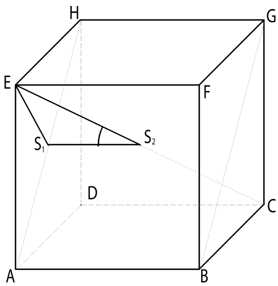
Vasil

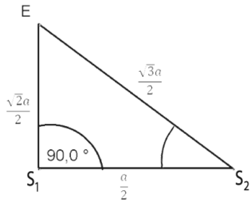
Úloha 4.

Pomocí Pythagorovy věty lze jednoduše spočítat, že stěnová úhlopříčka (např. AC) má velikost $\sqrt{2}a$, kde a je délka strany krychle (např. AB) a velikost tělesové úhlopříčky (např. CE) je $\sqrt{3}a$. Naším cílem je zjistit úhel mezi obdélníkem ABGH a úsečkou CE, neboli úhel S_1S_2E. Proto si překreslíme tento trojúhelník zvlášť. Hledaný úhel spočítáme například pomocí funkce tangens.

$$\begin{aligned} \tan\angle S_1S_2E &= \frac{\frac{\sqrt{2}a}{2}}{\frac{a}{2}} \\ \tan\angle S_1S_2E &= \sqrt{2} \\ \angle S_1S_2E &\approx 54^\circ 44' \end{aligned}$$

Pája





Úloha 5.

K dispozici jsou 3 trojslabičná slova a 5 dvojslabičných. Věta o právě pěti slabikách tedy bude obsahovat jedno trojslabičné a jedno dvojslabičné slovo. Můžeme postupovat tak, že si vezmeme jedno trojslabičné slovo. K tomu můžeme přiřadit celkem 5 dvojslabičných slov — to už máme 5 vět. Takto postupujeme u všech tří trojslabičných slov. Dostaneme tedy lehký výpočet $5 \cdot 3 = 15$. Troll tedy může složit celkem 15 vět.

Jiřík

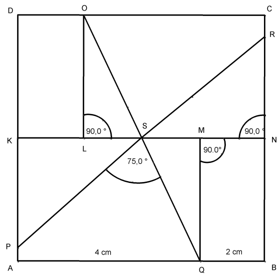
Úloha 6.

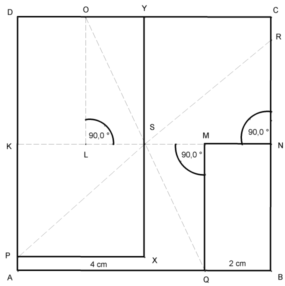
Protože obě přímky prochází středem čtverce, rozdělují body O, Q úsečky AB a CD ve stejném poměru a body P, R úsečky AD a BC také ve stejném poměru (ale jiném, než v jakém jsou rozděleny AB a CD). Ze středové souměrnosti se středem v bodě S vyplývá, že $\triangle\ SLO \simeq \triangle\ SMQ$ a $\triangle\ SNR \simeq \triangle\ SKP$. Vyšrafovanou část si tedy můžeme překreslit do dvou obdélníků — $QBNM$ a $PXYD$ (obr. 2). Označme S_1 jako obsah obdélníku $QBNM$ a S_2 jako obsah obdélníku $PXYD$. Celkový obsah S vyšrafované části pak spočítáme jako součet S_1 a S_2.

Ze zadání víme, že úsečka AB je rozdělena v poměru $1 : 2$ a délka strany čtverce je 6 cm. Z toho vyplývá, že $|BQ| = 2$ cm. Bod N půlí stranu BC, tedy $|BN| = 3$ cm. Nyní můžeme spočítat S_1, $S_1 = |BQ| \cdot |BN| = 6\ \text{cm}^2$. Abychom mohli spočítat obsah obdélníku $PXYD$, musíme určit délky jeho stran. Bod Y leží ve středu strany DC, proto $|DY| = 3$ cm. Bod K leží uprostřed strany AD, platí tedy $|DK| = 3$ cm. Délku úsečky KP určíme pomocí goniometrických vztahů platících v pravoúhlém trojúhelníku. Využijeme k tomu $\triangle\ SNR$ (ze shodnosti víme, že $|NR| = |KP|$). Protože úhel PSR je přímý, určitě platí $|\angle RSQ| = 105°$. Dále z $\triangle\ QSM$ vyplývá, že $\tan \angle MSQ = \frac{|MQ|}{|MS|} = 3$, kdy $|\angle MSQ| = \arctan 3$. Můžeme tedy určit velikost úhlu RSN, $|\angle RSN| = 105° - \arctan 3$. V $\triangle$ SNR platí

$\tan \angle RSN = \frac{|RN|}{|SN|} = \frac{|KP|}{|3|}$, z čehož plyne, $|KP| = 3 \cdot \tan(105° - \arctan 3) \approx 2$ cm. $|DP| = |DK| + |KP| = 5$ cm, $S_2 = |DX| \cdot |DP| = 15$ cm^2. $S = S_1 + S_2 = 21$ cm^2.

Obsah vyšrafovaných částí je tedy 21 cm^2.





Bára

Diofantické rovnice

V této sérii bych Vám rád představil další druh netypických úloh, které Vás (snad) naučím řešit. Tímto typem jsou Diofantické (též Diofantovské) rovnice.

Povězme si nejprve něco o samotném Diofantovi, který se právě zabýval těmito rovnicemi, a proto po něm dostaly jméno. Diofantos z Alexandrie byl jeden z posledních velkých řeckých matematiků ve starověku. Je nazýván „otcem aritmetiky“ a to proto, že celou aritmetiku pozvedl na vyšší úroveň. Začal totiž systematicky používat aritmetické symboly (jako například plus, mínus, krát a děleno) a také zavedl nové znaky pro označování mocnin. Jeho nejznámějším dílem je třináctidílný traktát Aritmetika, ze kterého ještě po dlouhou dobu vycházeli slavní matematici jako například Euler nebo Fermat. O velikosti Diofanta svědčí také jeho nápis na náhrobku, ten zní: „*Poutníče! Zde odpočívá popel Diofantův. A čísla poví, je to zázrak, jak dlouhý byl jeho život. Šestina života patřila krásnému dětství. Ještě dvanáctina života uběhla, než se jeho brada pokryla chmýřím. Sedminu života strávil v bezdětném manželství. Uplynulo dalších pět let a radoval se z narození krásného syna, toho, kterému Osud vyměřil veselý a zářící život na této Zemi, ale dlouhý jen polovinu toho, co otci. A v hlubokém smutku ukončil starý muž svou pouť zde na Zemi, čtyři roky po ztrátě syna.*“ Už víš jak dlouho Diofantos žil? Bylo to celých 84 let!

Nyní se zase vraťme k našemu hlavnímu tématu. Diofantická rovnice je taková rovnice, která může mít libovolný počet neznámých a její řešení je pouze z oboru celých čísel. Taková rovnice pak má většinou více možných řešení, ale může nastat i situace, kdy žádné řešení neexistuje.

Asi nejslavnější Diofantická rovnice je Velká Fermatova věta ($x^n + y^n = z^n$), jejíž řešení by se na tyto stránky jistě nevešlo, a nebudeme se jí zabývat. Budeme se proto zabývat mnohem jednoduššími druhy rovnic. Označují se jako lineární Diofantické rovnice a dají se zapsat asi takto: $ax + by = c$, kde písmena a, b a c označují nějaká celá čísla a znaky x a y jsou neznámé, jejichž řešení hledáme. V rovnici nemusejí být jenom dvě neznámé, ale celkem libovolný počet. Nějaká konkrétní rovnice může vypadat třeba takto: $5x + 4y + 7z = 3$.

Při řešení každé lineární Diofantické rovnice nejdříve zjistíme, jestli má vůbec nějaké řešení. To provedeme jednoduše. Pokud je číslo na pravé straně rovnice (pro nás písmeno c) dělitelné (myšleno beze zbytku) největším společným dělitelem koeficientů u neznámých (písmena a a b) má tato rovnice řešení (a pak je jich většinou nekonečně mnoho). Jinak je rovnice bez řešení.

Úloha 1: Zjistěte, zda tyto rovnice mají řešení v oboru celých čísel.

$$\begin{aligned} 7x + 13y &= 12 \\ 5x + 15y &= 125 \\ 12x + 28y &= 10 \end{aligned}$$

Řešení:

Tak nejprve k první rovnici. Největší společný dělitel čísel 7 a 13 je hodnota 1. Protože číslo 12 je určitě dělitelné číslem 1 (to ostatně platí pro každé číslo), má tato rovnice řešení. Jako příklad můžu uvést například uspořádanou dvojici $[11; -5]$. U druhé rovnice je největším společným dělitelem čísel 5 a 15 hodnota 5. Protože číslo 125 je dělitelné pěti, má i tato rovnice řešení, např. $[4; 7]$. Největším společným dělitelem u třetí rovnice je číslo 4, ale protože 10 není dělitelné 4, tato rovnice řešení nemá.

Postupů jak řešit tyto rovnice je vícero, ale já Vás prozatím naučím alespoň ty nejzákladnější. Jestliže se má rovnice řešit v celém oboru celých čísel, tak pokud má nějaké řešení, pak jich má nekonečně mnoho. Tady se asi moc nevyplatí jen tak nazdařbůh zkoušet různé možnosti, to bychom tady byli dost dlouho (konkrétně nekonečně dlouho). Postupuje se tedy tak, že se jedna z neznámých nahradí parametrem a druhá se pak vyjádří v závislosti na tomto parametru. Ukažme si nějaký příklad.

Úloha 2: V oboru celých čísel řešte tuto Diofantickou rovnici:

$$3x - 12y = 27$$

Řešení:

Jednu neznámou si nahradíme parametrem. Učiňme tak třeba s neznámou y, kterou nahradíme prostě jen za jiné písmenko, třeba n. Z rovnice už pak jen stačí vyjádřit x.

$$\begin{aligned} y &= n \\ x &= 4n + 9 \end{aligned}$$

Řešením je tedy tato uspořádaná dvojce $[4n + 9; n]; \forall\ n \in \mathbb{Z}$. Jednoduše provedeme zkoušku tak, že do původní rovnice tyto hodnoty dosadíme.

$$\begin{aligned} 3\,(4n + 9)\ -\ 12n &= 27 \\ 12n + 27\ -\ 12n &= 27 \end{aligned}$$

Což platí a je z toho zřejmé, že tato rovnice má nekonečně mnoho řešení. Pro úplnou kontrolu si můžeme dosadit přímo pár hodnot. Když $n = 1$, pak x = 4 + 9 a y = 1, dosazením do rovnice dostáváme:

$$\begin{aligned} 3\,(4+9) - 12 \cdot 1 &= 27 \\ 39 - 12 &= 27 \end{aligned}$$

To samozřejmě platí i pro jiná čísla, než $n = 1$. n se totiž může rovnat jakémukoliv celému číslu.

Jiné, někdy jednodušší, řešení můžeme použít, když máme hledat řešení rovnice jen v oboru přirozených čísel (někdy se počítá i s nulou). V tomto případě je možná lepší zkusit za neznámou x dosazovat čísla od 0 a výše, tak dlouho než hodnota y, které z rovnice dopočítáme, klesne do záporných hodnot.

Úloha 3: V oboru celých nezáporných čísel (tj. celá čísla větší nebo rovna nule) řešte tuto rovnici:

$$4x + y = 9$$

Řešení:
Začněme tedy postupně a za x si dosaďme nejmenší možné číslo, tedy 0, y v tomto případě bude mít hodnotu 9. To je v pořádku jsou to celá nezáporná čísla. Pokračujeme dále. Když $x = 1$, pak $y = 5$. Zase zvýšíme o jedna, $x = 2$, $y = 1$. Dále $x = 3$, $y = -3$. Toto již není v pořádku, protože -3 je záporné číslo. Našli jsme tedy tato řešení $[0; 9], [1; 5], [2; 1]$.

Toto řešení však někdy může být zdlouhavé. Ukažme si tedy, jak i v tomto případě pracovat s parametrem. Jediný rozdíl bude v tom, že n nebude z celého oboru celých čísel, ale musíme vybrat takové hodnoty, aby x a $y \geq 0$.

Úloha 4: V oboru celých nezáporných čísel řešte tuto rovnici:

$$x + 4y = 23$$

Řešení:
Nejprve si za neznámou y dosaďme parametr n. Protože víme, že $y = n$ a y je nezáporné číslo, musí platit tato nerovnost: $n \geq 0$. Poté z rovnice vyjádříme x.

$$x = 23 - 4n$$

Protože i x je nezáporné číslo, musí platit:

$$\begin{aligned} 23 - 4n &\geq 0 \\ 23 &\geq 4n \\ \frac{23}{4} &\geq n \\ 5,75 &\geq n \end{aligned}$$

Protože n musí být celé nezáporné číslo, máme na výběr jen z těchto hodnot $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Nyní už můžeme zapsat řešení: $[23 - 4n; n]; n = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Kdo chce, může si samozřejmě provést zkoušku.

To je asi tak vše z toho základního, co potřebujete k řešení těchto rovnic vědět. Na závěr připojuji ještě dva slovní příklady, které již zde nebudu podrobněji rozebírat a napíšu Vám jen jejich správné řešení. Kdyby přece jen někdo, i po přečtení tohoto článku, měl problém s jejich vyřešením, nechť neváhá napsat nám o pomoc. Hodně zdaru při jejich řešení.

Úloha 5: Diofantos má v peněžence 100 Kč v dvaceti nebo deseti korunách. Kolik deseti a dvaceti korun může mít v peněžence?

Řešení:
Slovní úloha vede k této rovnici:

$$10x + 20y = 100$$

a má tato řešení $[10 - 2n; n]; n = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Tedy např. žádnou desetikorunu a 5 dvacetikorun nebo 2 desetikoruny a 4 dvacetikoruny atd.

Úloha 6: Na dvoře zmateně běhají vrabci, které honí kočky. Přitom je na dvoře celkem 36 nohou.

Řešení:
Rovnice

$$2x + 4y = 36$$

má tato řešení $[18 - 2n; n]; n = \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$. Na dvoře může být třeba 14 vrabců a 2 kočky nebo 8 vrabců a 5 koček.

Pája

Výsledkové listiny

Tady najdete jen několik nejlepších řešitelů, pro úplné výsledkové listiny se podívejte na naše internetové stránky.

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Berenika	Čermáková	-	-	-	-	-	-	0	25

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Aleš	Krčil	6	5	-	6	7	8	32	146
2.	Alžběta	Maleňáková	6	5	-	6	7	8	32	140
3.	Jan	Havelka	6	5	-	3	7	8	29	122
4.	Pavel	Turek	6	4	-	6	7	4	27	108
5.	Eliška	Červenková	6	5	-	2	7	8	28	99
6.	Jiří	Gbelec	-	3	-	3	7	-	13	42
7.	Pavel	Vondráček	-	-	-	-	-	-	0	24
8.	Anastázie	Chalupová	0	3	-	-	7	1	11	18

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Anna	Kufová	6	5	-	3	7	8	29	149
2.	Marek	Janka	6	5	-	6	7	3	27	124
3.	Daniel	Pišťák	4	5	-	6	7	-	22	110
4.	Anna	Červenková	6	5	-	2	7	8	28	99
5.	David	Gráf	-	-	-	-	-	-	0	64
6.	Patrik	Šindler	-	-	-	-	-	-	0	51
7.	Veronika	Hánová	-	3	-	-	7	1	11	46
8.	Ondřej	Pavelka	-	-	-	-	-	-	0	42
9.-10.	Veronika	Hájková	-	-	-	-	-	-	0	34
	Eliška	Pfaurová	-	3	-	-	-	-	3	34
11.	Jana	Gebauerová	-	-	-	-	-	-	0	33
12.	Vít	Grosser	-	-	-	-	-	-	0	32
13.	Jakub	Novák	-	-	-	-	-	-	0	30

	jméno	příjmení	1	2	3	4	5	6	S	∑
14.-15.	Zuzana	Beigerová	-	-	-	-	-	-	0	22
	Lukáš	Klocek	-	-	-	-	-	-	0	22
16.	Jindřich	Brož	-	-	-	-	-	-	0	17
17.-19.	Jakub	Brož	-	-	-	-	-	-	0	15
	Lukáš	Frankl	-	-	-	-	-	-	0	15
	Kateřina	Grygarová	-	-	-	-	-	-	0	15
20.	Eva	Kubelová	-	-	-	-	-	-	0	12
21.	Daniel	Musil	-	-	-	-	-	-	0	10
22.	Iveta	Márovcová	-	-	-	-	-	-	0	6
23.	Kristýna	Filípková	-	-	-	-	-	-	0	2
24.	Ota	Novotný	-	-	-	-	-	-	0	1

9. ročník

	jméno	příjmení	1	2	3	4	5	6	S	∑
1.	Václav	Rozhoň	6	5	-	6	7	6	30	140
2.	Szymon	Wantuła	6	5	-	6	7	1	25	135
3.	Martin	Vančura	5	4	-	2	7	8	26	132
4.	Jan	Marek	6	5	-	6	7	8	32	124
5.	Michael	Matějka	4	5	-	6	7	6	28	119
6.	Ondřej	Darmovzal	-	-	-	-	-	-	0	117
7.	Tomáš	Müller	6	5	-	4	7	8	30	106
8.	Matěj	Dirr	4	4	-	0	7	6	21	101
9.	Jan	Skořepa	-	-	-	-	-	-	0	96
10.-11.	Jan	Erhart	-	-	-	-	-	-	0	74
	Diana	Hachová	-	-	-	-	-	-	0	74
12.	Eva	Harlenderová	-	-	-	-	-	-	0	65
13.	Radim	Bárta	-	-	-	-	-	-	0	59
14.	Vojtěch	Kovář	6	3	-	2	7	-	18	52
15.	Pavel	Kubíska	4	3	-	-	7	-	14	29
16.	Štěpánka	Dobalová	-	-	-	-	-	-	0	24
17.	Petra	Pavelková	-	-	-	-	-	-	0	17
18.-19.	Jan	Jež	-	-	-	-	-	-	0	14
	Kristýna	Krupičková	-	-	-	-	-	-	0	14
20.	Veronika	Synková	-	-	-	-	-	-	0	13
21.	Pavel	Špíšek	-	-	-	-	-	-	0	11
22.	Pavla	Baarová	-	-	-	-	-	-	0	10
23.	Klára	Dubská	-	-	-	-	-	-	0	8
24.	Michal	Nguyen	-	-	-	-	-	-	0	6