KOKOS

32. ročník ⋆ **6.leták**

Milý řešiteli, školní rok utekl jako voda a ty máš teď před sebou šestou, poslední sérii. Doufáme, že sis dlouhé “prázdniny” náležitě užil a zpestřil trochou matematických úloh. Další příklady už zde sice nenajdeš, nicméně se můžeš těšit na příští ročník semináře, který pro Tebe (a ostatní řešitele) pilně připravujeme. Přejeme Ti hodně zdraví a pěkné vysvědčení!

Organizátoři

BLAHOPŘEJEME **Pavle Šimové**, která se se svými 172 body stává nejúspěšnější řešitelkou letošního ročníku.
Těsně za ní se umístil **Václav Verner** se 165 body, třetí místo obsadil **Matyáš Burda** se 161 body.

Blahopřejeme i jednotlivým vítězům ve svých kategoriích:

	1. místo	2. místo	3. místo
9.ročník	Vilém Bednařík	Ivana Ludvíková	Jana Dreiseitlová
8.ročník	Pavla Šimová	Václav Verner	Matyáš Burda
7.ročník	Martina Černá	Matěj Svoboda	Josef Kroček
6.ročník	Dominik Müller	Marie Sabolová	Matylda Chvojková

Závěrečná část příběhu

Za oknem vlaku se pomalu stmívalo. Zrovna vjížděli do tunelu, když se Tomáš konečně probudil. Lukáš ho celou dobu poočku pozoroval a zadržoval smích, když mu po bradě tekla slina. „No konečně jsi vzhůru!“ ozval se nedočkavě. Vytáhl z jedné kapsy karty a z druhé oblíbené sýrové tyčinky. „Co takhle šestašedesát?“ nenechal Toma na pokoji podávaje mu svačinu. Tomáš raději přistoupil na jeho hru: „Rozdáváš!“

Čas rychle utíkal a vlak pádil do města, kde kluci bydleli. Po jedenácti Lukášových výhrách to Tomáš vzdal a raději snědl poslední drobky ze sáčku. Celý víkend jako by byl už daleko za nimi, ale pořád měli v hlavě vzpomínky na každý okamžik parádních dnů. Dorazili na nádraží a nezbývalo jim, než se taky rozloučit.

Autorská řešení 5. série

Úloha 1.

Délku práce dětí začínajících v 8 hodin ráno označme x. Jelikož Tomáš se sousedkami začínali o hodinu později, délku jejich práce označíme $x-1$. Délku práce dvou sousedů označíme $x-3$. Pomocí informací ze zadání sestavíme následující rovnici:

$$
\begin{aligned}
50 &= 4x + 4(x-1) + 2(x-3)\\
50 &= 10x - 10\\
6 &= x
\end{aligned}
$$

Katka, Vašek, Terka a Lukáš tedy pracovali 6 hodin, Tom a sousedky 5 hodin, sousedi 3 hodiny. Jelikož si udělali hodinovou přestávku, celkem pracovali 15 hodin.

Verča

Úloha 2.

Označme věk Adamových dětí jako a, b, c. Maximální součin musí být 12 (počet měsíců v roce) a věky jsou odlišné.
Musíme najít všechny celočíselné rozklady čísel 1 až 12. Jelikož nemůžou být stejného věku, můžeme čísla 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11 rovnou vynechat. ($1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$; $1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$; $1 \cdot 3 \cdot 3/1 \cdot 1 \cdot 9 = 9$; atp.).
Zbydou čísla 6, 8, 10, 12. $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$, $8 = 1 \cdot 2 \cdot 4$, $10 = 1 \cdot 2 \cdot 5$, $12 = 1 \cdot 2 \cdot 6$, $12 = 1 \cdot 3 \cdot 4$ (toto jsou všechny možnosti)
Dále platí podmínka, že o rok později můžeme sečíst jejich věky a dostaneme stejný výsledek. Sestavíme rovnici:

$$a \cdot b \cdot c = a + b + c + 3$$

Postupně dosazujeme čísla z rozkladů (př.: $1 \cdot 2 \cdot 6 = 1 + 2 + 6 + 3$) a zjistíme, že děti mají 1, 2 a 6 roků.

Míša

Úloha 3.

Označme strany fialového obdélníku jako x a y. Víme, že vzorec pro obsah obdélníku zní ab a pro obsah čtverce a^2. Obsah fialové části vypočítáme jako xy, obsah modré jako $6xy$, černé jako $3x^2$ a zelené $2y^2$. Z těchto informací sestavíme následující rovnici:

$$
\begin{aligned}
xy + 6xy + 3x^2 + 2y^2 &= 42 \\
x(y + 3x) + 2y(3x + y) &= 42 \\
(x + 2y)(3x + y) &= 42 \text{ na součinový tvar}
\end{aligned}
$$

Číslo 42 můžeme rozložit na součin dvou činitelů z množiny přirozených čísel následovně: $1 \cdot 42$, $2 \cdot 21$, $3 \cdot 14$, $6 \cdot 7$

Z rovnice o dvou neznámých vytvoříme osm (jelikož pořadí činitelů lze zaměnit) snáze řešitelných soustav dvou rovnic o dvou neznámých, např:

$$(x + 2y)(3x + y) = 1 \cdot 42 \Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
(x + 2y) &= 1 \\
(3x + y) &= 42
\end{aligned}
$$

$$(x + 2y)(3x + y) = 42 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
(x + 2y) &= 42 \\
(3x + y) &= 1
\end{aligned}
$$

V množině přirozených čísel má řešení pouze jedna ze soustav:

$$
\begin{aligned}
x + 2y &= 7 \\
3x + y &= 6 \\
x &= 1 \\
y &= 3
\end{aligned}
$$

Fialová část má 3 cm^2, modrá 18 cm^2, černá 3 cm^2 a zelená 18 cm^2.

Zuzka

Úloha 4.
Pokud je číslo dělitelné šedesáti, pak musí být dělitelné zároveň čísly 2^2, 3 a 5 (prvočíselný rozklad).
Celý výraz pomocí vytýkání rozložíme na součinový tvar:

$$(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$$

Jedná se o pět po sobě jdoucích čísel, najdeme mezi nimi alespoň dvě dvojice po sobě jdoucích čísel, z nichž jedno je sudé, př. $a(a+1)$, $a(a-1)$ - dělitelnost 2^2.
Alespoň jedno z čísel $(a-2)$, $(a-1)$, a je dělitelné třemi.
Jedno ze všech pěti čísel $(a-2)$, $(a-1)$, a, $(a+1)$, $(a+2)$ je dělitelné pěti.
Protože je rozklad výrazu dělitelný každým z prvočinitelů, je dělitelný i šedesáti.

Martička

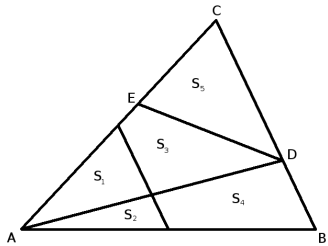
Úloha 5.
1.) Povšimněme si, že k-tý člen posloupnosti je ve tvaru $20k-1$. Při sečtení prvních 2019 členů této dostaneme:
$(20\cdot1-1)+(20\cdot2-1)+\ldots+(20\cdots2019-1) = 20\cdot(1+2+\ldots+2019)-2019 = 20\cdots\frac{2019\cdot2020}{2}-2019 = 2019\cdots2020\cdots10-2019$
Jasně vidíme, že menšenec je dělitelný číslem 2020, naopak menšitelem je číslo 2019, které dává po dělení 2020 zbytek 1. Proto tuto podmínku splňuje i celý výraz.

2.)Pokud existuje nekonečně mnoho členů této posloupnosti, které dávají stejný zbytek po dělení 2020 jako 1. člen, lze to provést nekonečně mnoha způsoby. Když dává člen zbytek 19, následující člen dá zbytek 39, další 59, atd. Pokud sečteme libovolných 2019 po sobě jdoucích členů této posloupnosti s 1. číslem dávajícím zbytek 19 po dělení 2020, jejich součet dává stejný zbytek po dělení 2020 jako součet prvních 2019 členů této posloupnosti, tedy zbytek 1. Určitě existuje nekonečně mnoho členů ve tvaru $20\cdot(101l+1)-1$, všechny tyto členy dávají zbytek 19 po dělení 2020, protože je můžeme přepsat do tvaru $2020\cdot l+20-1 = 2020\cdot l+19$. Lze to provést nekonečně mnoha způsoby.

Danek

Úloha 6.

Obsah celého trojúhelníku si označíme S. Trojúhelník ABD má stejnou výšku na stranu BD jako trojúhelník ABC a má třetinovou podstavu, takže jeho obsah je $1/3S$. Obsah trojúhelníku ADC je obsah trojúhelníku ABC – obsah trojúhelníku ABD, takže S–$1/3S = 2/3S$. Střední příčka v trojúhelníku ABC je zároveň střední příčka v trojúhelníku ABD a ADC. Střední příčka od trojúhelníku oddělí trojúhelník o čtvrtinovém obsahu, takže:



$$
\begin{aligned}
S_1 &= 1/4 \cdot 2/3 \cdot S = 1/6S \\
S_2 &= 1/4 \cdot 1/3 \cdot S = 1/12S \\
S_4 &= 1/3S – S_2 = 1/3S – 1/12S = 1/4S
\end{aligned}
$$

Trojúhelník CED má stejnou výšku na stranu CE jako trojúhelník ADC a má podstavu velkou 2/5 podstavy trojúhelníku ADC, takže jeho obsah je:

$$S_5 = 2/5 \cdot 2/3S = 4/15S.$$

a poslední

$$S_3 = 2/3S – S_1 – S_5 = 2/3S – 1/6S – 4/15S = 7/30S$$

Převedeme na stejný základ:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= 1/6S = 10/60S \\
S_2 &= 1/12S = 5/60S \\
S_3 &= 7/30S = 14/60S \\
S_4 &= 1/4S = 15/60S \\
S_5 &= 4/15S = 16/60S
\end{aligned}
$$

Části dortu jsou od nejmenší po největší: S_2, S_1, S_3, S_4, S_5

Štěpán

Výsledkové listiny

Tady najdete jen několik nejlepších řešitelů, pro úplné výsledkové listiny se podívejte na naše internetové stránky.

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Dominik	Müller	-	-	-	-	-	-	0	86
2.	Marie	Sabolová	0	6	6	-	-	-	12	83
3.	Matylda	Chvojková	-	-	-	-	-	-	0	2

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Martina	Černá	5	6	6	4	4	3	28	149
2.	Matěj	Svoboda	5	6	6	2	4	3	26	132
3.	Josef	Kroček	-	-	-	-	-	-	0	28
4.	Alena	Knödlová	-	-	-	-	-	-	0	18
5.	Michal	Maděřič	-	-	-	-	-	-	0	4

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Pavla	Šimová	5	6	6	-	3	6	26	172
2.	Václav	Verner	5	6	6	6	9	6	38	165
3.	Matyáš	Burda	4	6	8	6	4	6	34	161
4.	Linda	Tománková	5	6	6	3	4	2	26	137
5.	Milan	Holotňák	-	-	-	-	-	-	0	127
6.	Anna	Seligová	-	-	-	-	-	-	0	74
7.	Jáchym	Vohradník	-	-	-	-	-	-	0	64
8.	Robert	Kubányi	-	-	-	-	-	-	0	32
9.	Zuzana	Hauznerová	-	-	-	-	-	-	0	26
10.	Alexandra	Seďová	-	-	-	-	-	-	0	25
11.	Jakub	Munzar	-	-	-	-	-	-	0	7

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Vilém	Bednařík	5	6	6	6	6	6	35	92
2.	Ivana	Ludvíková	5	6	6	-	-	6	23	86
3.	Jana	Dreiseitlová	-	-	-	-	-	-	0	66
4.	Vojtěch	Jozek	-	-	-	-	-	-	0	57
5.	Adam	Jemelka	-	-	-	-	-	-	0	31