KOKOS

32. ročník ⋆ 5. leták

Milý řešiteli, dostává se Ti do ruky již pátá, předposlední série! Jedná se tedy o Tvoji poslední šanci na získání bodů. Vzhledem k současné situaci byla její tvorba zpožděna, a tak se Ti omlouváme za čekání. Přejeme Ti hodně zdraví a úspěchů při řešení úloh!

Organizátoři

Zadání úloh

K Lukášovi a Terce se na snídani brzy připojili i ostatní. Všichni i přes dobrou náladu navozenou voňavými tousty, lahodnými džemy, marmeládami a kakaem kdesi hluboko uvnitř cítili, že se víkend chýlí ke konci. Jestliže chtějí být odpočinutí a hlavně připravení na pondělní vyučování, musí se vrátit domů. „Kéž bychom měli prázdniny“, stýskal si Lukáš. Nedalo se ale nic dělat, škola je škola a chodit se tam musí. Po snídani si alespoň zahráli karty a pak si řekli, že je třeba se začít pomalu balit.

Úloha 1. (5 bodů): Jednomu z nich by celá práce trvala 50 hodin. Ve čtyřech začali pracovat v 8 hodin ráno, v 9 hodin se k nim přidal Tomáš a tři sousedky z okolí, které to už nedokázaly poslouchat, a dva z jejich sousedů v 11 hodin, aby se jejich manželky vrátily včas na oběd. Kdy byli s prací hotovi, pokud si ve 12 hodin udělali hodinovou přestávku na oběd? Kolik hodin každá skupina pracovala?

Balení nakonec nebylo tak hrozné, udělali si v průběhu několik přestávek a nakonec nedlouho po obědě byli připraveni. Zrovna se chystali k odchodu, když kolem procházející postarší paní zavolala na Vaška: „Vašku! Vašíku!“ Vašek se otočil a hned jakmile paní uviděl, volal: „Dobrý den, paní Spurná, jak se máte?“ „Ale jde to, jde to. Co ty, jak se daří tátovi a mamince?“ ptala se s úsměvem paní Spurná. Byla to rodinná známá. Znala se už s Vaškovým dědečkem, mamkou i taťkou, strejdou, zkrátka s celou rodinou. Chvilku si s Vaškem povídala, řeč přišla i na Vaškovy kamarády a milá babička jim hned nabízela, že jestli půjdou někdy kolem, ať neváhají a staví se na čaj a sušenky. Řeč došla i na syna paní Spurné, Adama. Ten si před pár lety našel krásnou nevěstu a spokojeně s ní žil kousek dál podél potoka ve starém mlýně. O jeho dětech řekla poťouchle paní jen tohle.

Úloha 2. (6 bodů): Má tři děti, za tři měsíce bude součin jejich věků roven číslu právě onoho měsíce. Když sečtete jejich věky za rok od toho momentu, dostanete stejné číslo. Jak staré jsou děti a který je měsíc?
(Počítejme s tím, že nevíme, jaký je měsíc a každé dítě je minimálně o rok starší než to další. Číslo měsíce je - leden = 1 atd.)

Pro Lukáše, který jako obvykle nevěděl, který je aktuálně měsíc, to byl zvlášť těžký oříšek, ale i on nakonec správnou odpověď odhalil. Zanedlouho se s paní rozloučili a pokračovali v cestě do města. Zvolili klidnou pěšinu podél potoka. Sledovali stříbrné vlnky, které se vytvářely na časem obroušených oblázcích. Pozorovali konipasy a ledňáčky, jak loví nad bujnými peřejemi říčky. Ve stráních okolo se rozprostíralo husté borůvčí. Byla škoda, že už bylo dávno po sezóně a žádné plody už nenašli. Naštěstí se občas ve stráni objevila malina nebo lesní jahoda. Prošli skrz malý bukový lesík a před očima se jim rozprostřel nádherný výhled na hory a malebné městečko Telgart. Překrásný výjev přivábil hrstku malířů, kteří se snažili krásu a jedinečnost vyhlídky přenést na plátno.

Úloha 3. (8 bodů): Umělec maluje abstraktní obraz o ploše 42 cm^2. Plochu si rozdělil na čtyři části o čtvercových či obdélníkových rozměrech a každou vymaloval jinou barvou. Přitom víme, že:

1. Fialovou barvou vymaloval část ve tvaru obdélníku.
2. Modrou barvou vymaloval část ve tvaru obdélníku šestkrát většího, než fialovou.
3. Černou barvou vymaloval část ve tvaru čtverce, přičemž délka její strany a kratší ze stran fialového obdélníku se původně rovnaly, poté se ale rozhodl plochu černé části třikrát zvětšit.
4. Zelenou barvou vymaloval část ve tvaru čtverce, přičemž délka její strany a delší ze stran fialového obdélníku se původně rovnaly, poté se ale rozhodl plochu zelené části dvakrát zvětšit.

Kolik cm^2 má každá část? Počítejte v množině přirozených čísel.

Přátelé chvíli obdivovali jejich zručnost, ale poté pokračovali v cestě, aby nezmeškali vlak. Ve městě měli dost času, a tak se stavili na zmrzlinu do cukrárny na náměstí. Měli výbornou pistáciovou a snad ještě lepší vanilkovou. Paní za pultem na porcích rozhodně nešetřila. Snažili se, ale s obří porcí zmrzliny v tak teplý den si nestíhali poradit, až jim delikátní rozpuštěná vanilková hmota stekla na prsty. Našli krásné posezení pod majestátními lípami na horním konci náměstí, kde si v malé fontánce umyli ulepené prsty. Po chvilce rozjímání Terka vytáhla sešity. „No to ne!“ zhrozil se Vašek. „Neříkej, že zrovna teď myslíš na školu! Jestli chceš tak ti dám takové dva příklady, že ti s nimi ani všechna škola nepomůže!“ „Chceš se vsadit?“ odpověděla vyzývavě. „Klidně,“ reagoval s chladným klidem Lukáš. „O ten zvláštní jahodový trojúhelníkový dort, co byl v cukrárně.“ „Platí,“ opáčila.

Úloha 4. (6 bodů): Dokažte, že pro všechna celá čísla a platí, že číslo 60 dělí výraz $a^5 - 5a^3 + 4a$

Úloha 5. (9 bodů): Mějme za sebou napsána postupně všechna taková přirozená čísla, která po dělení dvaceti dávají zbytek 19 (tj. 19, 39, 59, 79, 99, 119, ...).
1. Je možné vybrat 2019 po sobě jdoucích členů této posloupnosti tak, aby jejich součet dával zbytek 1 po dělení číslem 2020?
2. Pokud ano, určete, jestli to lze provést konečně, nebo nekonečně mnoha způsoby.

První příklad Terka přeletěla jako nic, použila to, co se nedávno učili ve škole. Nicméně druhý příklad byl těžší, větší a tvrdší kokosový ořech. Nebyla by to ale ona, kdyby na něj použitím každé špetky svého důvtipu a logiky nepřišla. Plácla s řešením na stůl před Lukáše. Trošku samolibě se usmála a lehce kývla směrem k cukrárně. Lukáš jen těžko skrýval úsměv a tak radši hned vyrazil pro dort.

Úloha 6. (6 bodů): Terka krájí dort tvaru trojúhelníku na 5 částí. „Vrcholy“ dortu označme jako A, B a C. Prvním řezem protne bod A a stranu BC protne v bodě D, $|BD| = 1/3\ |BC|$. Druhým řezem protne bod D a stranu AC protne v bodě E, $|AE| = 3/5\ |AC|$. Třetím řezem je střední příčka trojúhelníku ABC rovnoběžná se stranou BC. Seřaďte části dortu podle velikosti od nejmenší po největší.

Terka se se všemi o lahodný dort podělila, byl hedvábně hebký a sametově sladký. Chuť jahod v něm byla výjimečná. Byla to krásná tečka za krásným víkendem. Čas kvapil a odjezd vlaku se blížil. Kamarádi dojedli poslední drobečky a vyšli svižně na nádraží. Zde se s úsměvem a slzami rozloučili. Tomáš s Lukášem nastoupili do vlaku. Vlak zafuněl a pomalu se rozjel. Kluci intenzivně mávali, dokud se jim kamarádi neztratili z očí. Usedli do kupé, Tom se začetl do knížky a Lukáš se zasněně díval z okénka na ubíhající krajinu...

Řešení úloh 5. série posílejte do ***12.6.2020*** *na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 01 Bílovec

Autorská řešení 4. série

Úloha 1.
Původní počet veverek na lípě označíme l, na dubu d a na javoru j.

$$\begin{aligned} l + d + j &= 34 \\ d + 7 &= j + l - 7 \\ j - 5 &= l - 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l + d + j &= 34 \\ -d + j + l &= 14 \\ j &= -2 + l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\text{–}2 + l + l &= 34 \\ -d\text{–}2 + l + l &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d + 2l &= 36 \\ -d + 2l &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4l &= 52 \\ l &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -d + 2x13 &= 16 \\ d &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j &= -2 + 13 \\ j &= 11 \end{aligned}$$

Na lípě původně sedělo 13, na dubu 10 a na javoru 11 veverek.

Magda G.

Úloha 2.

Dobu od okamžiku na rozcestí do odjezdu želvy označme t (v hodinách). Délku trasy od rozcestí k zastávce označme s (v stokrocích). Při pohodlném tempu bychom šli $\frac{s}{5}$ hodin a přišli bychom 15 minut po odjezdu želvy, platí tedy $\frac{s}{5} = t + \frac{1}{4}$.
Chůze s holemi trvá $\frac{s}{8}$ hodin což je o 10 minut méně než t; platí tedy $\frac{s}{8} = t - \frac{1}{6}$.
Z obou rovnic vyjádříme t: $t = \frac{s}{5} - \frac{1}{4}; t = \frac{s}{8} + \frac{1}{6}$.
Dostaneme novou rovnici $\frac{s}{5} - \frac{1}{4} = \frac{s}{8} + \frac{1}{6}$.
Jejími úpravami zjistíme délku trasy s: $s = 5,55$ stokroků

Mima

Úloha 3.

Vytvoříme soustavu rovnic.

$$\begin{aligned}
154 &= (a+10b)+(b+10a)\\
18 &= (a+10b)\text{–}(b+10a)\\
\\
11a+11b &= 15\,/(\cdot 9)\\
-9a+9b &= 18\,/(\cdot 11)\\
\\
99a+99b &= 1386\\
-99a+99b &= 198 \text{ (rovnice od sebe odečteme)}\\
\\
198b &= 1584\,/(:198)\\
b &= 8\\
\\
-9a+9\cdot 8 &= 18\\
9a &= 54\\
a &= 6
\end{aligned}$$

Jedná se o číslice 8 a 6.

Silva

Úloha 4.

Po každém tahu jednoho z hráčů zbyde 6, 4, nebo žádná kartička pexesa. Dvě zbýt nemohou, protože by určitě byly stejné a ten, kdo by byl na tahu, by je vzal.
Šance, že hráč při počtu šesti karet na tahu neposbírá žádné kartičky je 4/5. Jednu otočí a zbyde 5 kartiček. Pouze čtyři z nich jsou jiné než ta, kterou otočil a aby nevzal žádnou dvojici, musí vzít právě jednu z nich. Na to je šance 4/5.
Šance, že hráč na tahu posbírá všech 6 kartiček najednou, je 1/15. Nejdřív musí vzít jednu dvojici (šance 1/5), protože jednu otočí a pak 1 z 5 kartiček je stejná s tou, co otočil. A potom musí vzít další dvojici (šance 1/3), protože tam budou 4 kartičky, jednu z nich otočí a pak 1 z 3 kartiček je stejná s tou, co otočil. Celkem je tedy šance, že v jednom tahu vezme všech 6 kartiček $(1/5) \cdot (1/3) = 1/15$.
Šance, že hráč na tahu posbírá 2 kartičky z 6 (takže tam zbydou 4), je 2/15, protože nejdřív musí vzít jednu dvojici (šance 1/5), a pak nesmí otočit druhou dvojici, na to je šance 2/3. Celkem je tedy šance $(1/5) \cdot (2/3) = 2/15$.
Šance, že hráč na tahu posbírá 4 ze 4 kartiček, je 1/3, protože musí vzít jednu dvojici, takže jednu otočí a pak je tam 1 ze 3 kartiček stejná s tou, co otočil. Druhou dvojici vezme určitě.
Šance, že hráč na tahu neposbírá žádné kartičky, když jsou tam, je 4 je 2/3, protože jednu otočí a zbydou tam 3 kartičky, z toho jsou 2 jiné než ta, co otočil, aby nevzal žádnou dvojici, tak musí vzít jinou než otočil a na to je šance 2/3.
V tabulce je uvedeno, jaké jsou šance, že na konci kola zbyde 6, nebo 4, nebo žádná kartička.
Šance, že zbyde 6 kartiček, se spočítá jako: šance, že jich zbyde 6 z minulého kola krát 4/5.
Šance, že zbydou 4 kartičky, se spočítá jako: šance, že jich zbyde 6 z minulého kola krát 2/15 + šance že zbydou 4 z minulého kola krát 2/3.
Šance, že nezbyde žádná se spočítá jako: šance, že jich zbyde 6 z minulého kola krát 1/15 + šance že zbydou 4 z minulého kola krát 1/3.

	Zbyde 6 kartiček	Zbydou 4 kartičky	Nezbyde žádná
1. tah	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{22}{225}$
2. tah	$\frac{16}{25}$	$\frac{44}{225}$	$\frac{1}{15}$
3. tah	$\frac{64}{125}$	$\frac{728}{3375}$	$\frac{364}{3375}$
4. tah	$\frac{256}{625}$	$\frac{10736}{50625}$	$\frac{5368}{50625}$

Vyhraje vždy ten, při jehož tahu skončila hra (nezbyla žádná kartička), protože bude mít minimálně 2 dvojice ze 3.
Strojvedoucí začínal, hrál tedy 1. a 3. tah, takže jeho šance na výhru je:

$$\frac{1}{15} + \frac{364}{3375} = 0,1745 = 17,45\%$$

Ježek hrál druhý, takže hrál 2. a 4. tah, takže jeho šance na výhru je:

$$\frac{22}{225} + \frac{5368}{50625} = 0,2138 = 21,38\%$$

Štěpán P.

Úloha 5.

Nejprve si povšimněme, že $n!$ pro $n > 4$ končí vždy na číslici 0. Teď se zaměříme, na co může končit číslo $m^2 + 2$. Číslo m^2 může končit jen na číslice 0; 1; 4; 9; 6; 5, a proto $m^2 + 2$ může končit jen na číslice 2; 3; 6; 11; 8; 7. Stačí nám prozkoumat jen případy, kdy je $n < 5$ a po prozkoušení těchto pár možností obdržíme (*ještě teplé*) řešení $(m; n) = (0; 2), (2; 3)$.

Dan

Úloha 6.

Dle zadání sestavíme rovnici:

$$\begin{aligned}
(m+n) + (m-n) + (m \cdot n) + (m : n) &= 196 \\
2m + mn + m/n &= 196 \quad \text{(}m\text{, }n\text{ jsou přirozená čísla a výsledek taky, }m\text{ je} \\
m &= k \cdot n \\
2kn + kn^2 + k &= 196 \\
k(2n + n^2 + 1) &= 196 \quad (196 = 2^2 \cdot 7^2) \\
k(n+1)^2 &= 4 \cdot 7^2 \\
k = 4,\ n = 6,\ m = kn = 24 &
\end{aligned}$$

Dále pomocí Pythagorovy věty vypočítáme velikost strany o.

$$\begin{aligned}
o^2 &= m^2 + n^2 \\
o &= 24,74cm
\end{aligned}$$

Za pomocí vzorce sin$\beta = (m/o)$ nejdříve vypočítáme velikost úhlu β a jelikož víme, že trojúhelník $S_{AB}BC$ je pravoúhlý a součet všech jeho úhlů dává $180° = 0$, snadno tak dopočítáme velikost půlky úhlu γ.

$$\begin{aligned}
\sin\beta &= (24/24,74)\\
\beta = 76° &= 0\\
\gamma_1 &= 180° = 0 - 90° - \beta\\
\gamma_1 &= 14° = 0\\
\gamma &= 28° = 0
\end{aligned}$$

Eliška B.

Výsledkové listiny

Tady najdete jen několik nejlepších řešitelů, pro úplné výsledkové listiny se podívejte na naše internetové stránky.

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Dominik	Müller	5	3	6	1	-	-	15	86
2.	Marie	Sabolová	5	3	4	1	1	-	14	71
3.	Matylda	Chvojková	-	-	-	-	-	-	0	2

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Martina	Černá	5	5	6	0	-	7	23	121
2.	Matěj	Svoboda	5	3	5	0	7	-	20	106
3.	Josef	Kroček	-	-	-	-	-	-	0	28
4.	Alena	Knödlová	-	-	-	-	-	-	0	18
5.	Michal	Maděřič	-	-	-	-	-	-	0	4

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Pavla	Šimová	5	5	4	9	8	-	31	146
2.-4.	Matyáš	Burda	5	5	6	2	2	7	27	127
	Milan	Holotňák	5	5	6	9	1	3	29	127
	Václav	Verner	5	5	6	0	3	6	25	127
5.	Linda	Tománková	5	3	4	0	1	7	20	111
6.	Anna	Seligová	5	-	6	0	1	7	19	74
7.	Jáchym	Vohradník	-	-	-	-	-	-	0	64
8.	Robert	Kubányi	5	2	6	3	1	-	17	32
9.	Zuzana	Hauznerová	-	-	-	-	-	-	0	26
10.	Alexandra	Seďová	-	-	-	-	-	-	0	25
11.	Jakub	Munzar	-	-	-	-	-	-	0	7

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Jana	Dreiseitlová	-	-	-	-	-	-	0	66
2.	Ivana	Ludvíková	-	-	-	-	-	-	0	63
3.-4.	Vilém	Bednařík	5	5	4	6	1	6	27	57
	Vojtěch	Jozek	-	-	-	-	-	-	0	57
5.	Adam	Jemelka	-	-	-	-	-	-	0	31