KOKOS

32.ročník ⋆ **3.leták**

Blíží se nám konec pololetí a s ním i dlouho očekávané vysvědčení. I my jsme se Tě proto rozhodli za výsledky, dosažené jak ve škole, tak při řešení úloh, náležitě odměnit. A proto se Ti dostává do rukou tato jedinečná brožura obsahující zadání další série. Na Tvoje výsledky se budeme těšit už 24. února. Krom zbrusu nové série zasíláme i pozvánku na víkendovku s KoKoSem, ale teď už tě nebudemem zdržovat od řešení příkladů a popřejeme jen hodně štěstí.

Víkendovka s KoKoSem

Připravujeme pro Tebe Víkendovku s KoKoSem, která proběhne 20.–23. 2. 2020 v budově Domova mládeže při Gymnáziu Mikuláše Koperníka v Bílovci, a to pod pedagogickým dohledem za organizace studentů gymnázia.

Jedná se o 4 dny plné zábavy, her, a také přednášek na témata matematická, fyzikální či chemická. Cena, stanovená na 300 Kč, zahrnuje veškerý program včetně stravy a ubytování (vlastníci poukazu na soustředění jej můžou uplatnit). Pokud máš jakékoliv otázky, neváhej se obrátit na náš email gmkkokos@seznam.cz, kde Ti rádi všechno vysvětlíme. Pokud je Ti vše jasné, tak neváhej a vyplň naši internetovou přihlášku, kterou najdeš na našich webových stránkách kokos.gmk.cz. Poté, co ji obdržíme, Ti do několika dnů zašleme email s podrobnými informacemi. Těšíme se na Tebe!

Zadání úloh

… Tikot stále zesiloval. Kamarádi napjatě čekali. Uplynulo pět sekund, šest, sedm. A v tom se ozvalo: „CRRRR!!! Čas vypršel.“ Bylo jim málem do pláče. Poslední příklad nejspíš zadali sekundu po uplynutí časového limitu. Jak tam tak smutně stáli, otevřely se dveře a v nich usmívající se pan Cvrček. „No to je neuvěřitelné! Takhle dobrý výsledek jsem tu ještě neměl. Výborně! I ten poslední výsledek máte správně, žel po uplynutí časového limitu. Nic si z toho nedělejte!“ pravil bodře. „Zasloužíte si malou odměnu! Posaďte se prosím tady,“ a ukázal na krásný zahradní altánek. Zmizel v domě a za okamžik se vracel s bedýnkou nanuků. Byly tam jahodové, čokoládové a výtečné vanilkové. „No, berte si!“ pobízel je pan Cvrček. Všichni vděčně poděkovali a nabídli si. Nanuky byly výborné, byl hezký slunečný den a rychle se jim vracela dobrá nálada. Už je netrápilo, že jim vypršel čas. Měli radost, že dokázali vyřešit všechny příklady. S jejich hostitelem se dobře rozprávělo. Povídali si o vyřešených příkladech a o tématech, nad kterými pan

Cvrček zrovna pracuje.

Vaškovi zakručelo v břiše. Blížil se čas oběda. Rozloučili se a vyrazili zpátky do města. Vašek kamarády přivedl do výborné pizzerie, o které jim několikrát vyprávěl. Posezení bylo příjemné, obsluha milá a pizza prostě delikátní! Po rozžvýkání a polknutí posledního kousku pizzy Terka navrhla, aby se před odchodem domů šli ještě projít. Ostatní souhlasili. Procházeli se tak městečkem a došli k vývěsní tabuli. „Táaak, co je nového?" zeptal se tabule Tom. „No nekecaj!" vykřikla při pohledu na tabuli Katka. „Bude tu podzimní bál! A včil, večer!" „Pojďme tam!" jásala Terka. Lukáš se pousmál a řekl: „Vždyť nemáš šaty. Nikdo z nás." „Je tady krejčovství," odpověděl s úsměvem Vašek.
V krejčovství U Zlatého poníka, jak se podnik jmenoval, je přivítala milá mladá dáma v rudých saténových šatech. Na otázku, jestli půjčují obleky a šaty odpověděla jen úsměvem a pokývnutím hlavy. Kluci si vybrali rychle. Aby se nenudili, prozkoumávali úzké chodbičky obchodu. Při průchodu kolem regálu se starobylými klobouky zaslechl Tom rozhovor mezi starým pánem a krejčím, který mu zrovna bral míry. „Dobrý den. Myslím, že bych vám s tím mohl pomoci," ozval se Tom.

Úloha 1. (5 bodů): Muž si chtěl odložit v bance 1000 Kč. Navštívil 3 banky, každá z nich mu nabídla jiný úrok. V první bance mu řekli, že jednou za 6 měsíců se částka zvýší o 12 %. V druhé bance mu nabídli 24 % za každých 12 měsíců. Ve třetí bance mu nabídli za každý měsíc 1000 Kč, ale muž dá bance na oplátku první měsíc 1 Kč, druhý měsíc 2 Kč, třetí měsíc 4 Kč atd. (Vždy dvojnásobek částky, kterou jim dal minule.) Která banka je pro něj do budoucna nejpřínosnější a proč? A po jaké době by třetí banka začala muže okrádat?

„Jsi mi to ale chytrý mladý muž. Děkuji mnohokrát," děkoval starý pán, poté co mu Tom dobře poradil. Děvčata se mezitím při vybírání obleku spřátelila s dámou, která se ukázala být majitelkou obchodu. Ta poté, co se dozvěděla o tom, že mají rády matematiku, pro ně přišla s tímto zajímavým, leč zapeklitým problémem. Trápil ji již několik dní.

Úloha 2. (6 bodů): Dáma chce pokrýt nový elegantní oblek vyšitými stejně velkými rovnostrannými trojúhelníky, čtverci, nebo pravidelnými šestiúhelníky. Chce šetřit drahocennou sametovou nití, a proto chce z těchto tří obrazců najít ten „nejúspornější" (k pokrytí vyšije co nejmenší součet délek všech stran). K určení toho pravého využívá plošnou jednotku, tzn. porovná obvody všech útvarů pro obsah každého jednoho z nich roven jedné. Pomozte jí tyto obvody vypočítat a určete, který rovinný obrazec by si měla vybrat.

Děvčata s příkladem chvíli zápasila, ale nakonec na něj vyzrála. Paní majitelka byla tak potěšena, že se rozhodla ukázat jim speciální kolekce šatů a dát každé jedny skoro zdarma. Holky měly takovou radost z krásných nových šatů, že se jim ani nechtělo odpovídat klukům na jejich otravné reptání, kde byly tak dlouho.

Po cestě domů jim Vašek ukázal místní košíkářský klub. Vysvětlil jim, že je to tady veliká tradice. Telgart a pět dalších okolních vesnic spolu pravidelně soutěží na turnajích konaných střídavě ve všech vesnicích. Měli štěstí a jeden se právě v Telgartu konal. Po chvilce dívání jim bylo jasné, že co místním chybí do profesionality, to vynahrazují nadšením. Hráli naplno, ale naprosto férově. Viděli výborné poslední dva zápasy a z výsledkové tabule zjistili, že na konci turnaje získali všichni účastníci stejný počet bodů. Tabulku s výsledky již odehraných jednotlivých zápasů strhl vítr, ale kamarádi se rozhodli, že alespoň některé chybějící údaje dopočítají.

Úloha 3. (6 bodů): Turnaje, který se hrál systémem jedenkrát „každý s každým“ se zúčastnilo 6 týmů. Za vítězství byly uděleny 2 body, za prohru 0 bodů a za remízu po 1 bodu. Na konci turnaje získali všichni účastníci stejný počet bodů. Jaký nejmenší počet zápasů mohl skončit remízou?

Poté, co dorazili na chatu, si chvíli odpočinuli. Poseděli u krbu. Hráli různé karetní hry od žolíků až po jejich nejoblíbenější hru Bang!. Katka, která této hře tak nepropadla, mezitím řešila dvě zvláštní matematické úlohy.

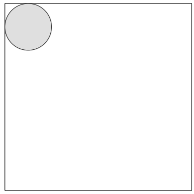
Úloha 4. (7 bodů): Mějme čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčka AC ho rozděluje na dva trojúhelníky - $\triangle ACD$ je pravoúhlý (pravý úhel leží u vrcholu D) a jeho obsah je roven dvojnásobku obsahu $\triangle ABC$. Na úhlopříčce AC leží body E a F tak, že $|AE| = |FC| = |AC|/3$. Jakou část obsahu $ABCD$ tvoří čtyřúhelník $BEDF$?

Úloha 5. (9 bodů): Číslo nazveme prvočíselným, jestliže jej můžeme v desítkové soustavě zapsat jen pomocí číslic z množiny jednociferných prvočísel $M = \{2, 3, 5, 7\}$. Příkladem takového čísla je 23572357 nebo 272. Najděte všechna prvočíselná čísla, která jsou 2. mocninou prvočísla.

Všichni se skvěle bavili, ale pokud chtěli stihnout vlak do vedlejší osady jménem

Bělosad, kde se ples konal, museli vyrazit. Kluci nahodili obleky a holky se ustrojily do nádherných šatů. Katka si vybrala krásné černo-bílé šaty doplněné o krajkové rukavičky a Terka měla prosté, leč neméně půvabné blankytně modré. Kluci, kterým móda nic neříkala, jejich večerní róby příliš nedocenili, krom Lukáše, který mohl na Terce oči nechat. Svezli se autobusem na vlakové nádraží, na které v pátek přijeli a odtud pokračovali o jednu stanici dále. Během cesty Vašek nenuceně kroužil vrškem od PET lahve po lichoběžníkové desce stolečku a přitom ho napadla zajímavá otázka.

Úloha 6. (7 bodů):
Mějme čtverec o základně $a = 10$ cm. V něm se pohybuje kruh o poloměru $r = 1$ cm tak, že se kruh při svém pohybu dotýká stále alespoň jedné ze stran čtverce. Určete obsah části, která nikdy nemůže být překryta pohybujícím se kruhem.



Ozvalo se jemné zasyčení brzd. „Bělosad. Konečná stanice," hlásil průvodčí, „prosíme, vystupte." Hned vedle nádraží se rozkládala podsaditá budova kulturního domu. Zevnitř hrála příjemná muzika a ozýval se zvučný smích. Vstupné bylo dobrovolné, a tak každý dal nějakou tu korunu. Vevnitř vládla příjemná atmosféra, sál měl krásné leštěné parkety. Celý byl obkládaný modřínovým dřevem. Po pravé a levé straně se rozkládaly řady stolů a naproti vchodu v krásném obkládaném kamenném krbu vesele tančily plameny. Celé místnosti dominoval velký taneční parket, kde nebylo ani moc těsno, ani prázdno. Celý večer si náramně užili. Popovídali si s místními, pili kofolu, tančili a smáli se. Večer se na chatě do teplých péřových peřin uložili unavení, a jakmile v teple svých postelí usínali, v duchu si procházeli události tohoto krásného dne. A bude takový i zítřek?

Řešení úloh 3. série posílejte do ***24. 2. 2020*** *na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 01 Bílovec

Autorská řešení 2. série

Úloha 1.

Nejdřív najdeme nejmenší společný násobek čísel 4, 5, 6, 9 a 10 rozkladem na prvočinitele:

$$4 = 2 \cdot 2, 5 = 1 \cdot 5, 6 = 2 \cdot 3, 9 = 3 \cdot 3, 10 = 2 \cdot 5 \Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 = 180$$

Druhá mocnina tedy obsahuje násobek čísla 180. Jelikož ale její odmocnina musí být přirozené číslo, všichni prvočinitelé v rozkladu musí být v sudé mocnině:

$$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 = 900$$
$$\sqrt{900} = 30$$

Hledaná čísla jsou násobkem 30, jedná se tedy o 30, 60, 90, 120, 150, a 180

Zuzka

Úloha 2.

Nejhorší situace může nastat, když se libovolných sedm lidí bude znát způsobem „každý s každým“ a jeden člověk nebude mít žádného kamaráda. Povšimněme si, že ke znázornění přátelství můžeme elegantně použít graf, kde osoby jsou reprezentovány vrcholy a přátelství hranami.
Úlohu můžeme přeformulovat na: určete počet hran, které má úplný graf o sedmi vrcholech. Pokud je menší než 22, musí existovat aspoň jedna hrana, která vede do osmého vrcholu. Počet hran v úplném grafu je $E_{k_n} = n(n-1)/2$. Pro sedm vrcholů dostáváme počet $E_{k_7} = 7(7-1)/2 = 21$. Počet hran v úplném grafu o sedmi vrcholech je 21, tudíž musí existovat aspoň jeden člověk, který zná osmého. Celý graf je tedy souvislý a zprávu se dozví všichni. (viz. Piroh druhá série)

Kuba

Úloha 3.

Pravá strana rovnice, kterou máme řešit, je určitě číslo liché, takže i levá strana musí být liché číslo. Pokud by n bylo liché, tak $n^2 + 2f(n) + 1$ je sudé, proto n určitě liché není. Pokud by n bylo sudé, tak $n^2 + 2f(n) + 1$ bude číslo liché, takže n je sudé. Pro každé sudé n je $f(n) = 2$. Danou rovnici tedy můžeme zapsat ve tvaru:

$$\begin{aligned} n^2 + 2 \cdot 2 + 1 &= (2m+1)^2 \\ 5 &= (2m+1)^2 - n^2 \\ 5 &= (2m+1-n) \cdot (2m+1+1) \end{aligned}$$

Protože jsou výrazy v závorkách celá čísla a výraz $(2m+1+n)$ je přirozené číslo, můžeme sestavit následující soustavu rovnic o dvou neznámých m a n. Její řešení bude řešením původní rovnice, neboť jsme pro úpravu rovnice používali jen ekvivalentní úpravy.

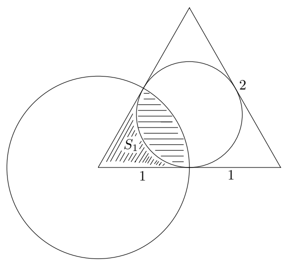
$$\begin{aligned}(2m+1-n) &= 1\\(2m+1+1) &= 5\\ \\4m+2 &= 6\\m &= 1\\ \\n &= 5-1-2m\\n &= 4-2\cdot 1=2\end{aligned}$$

Jediným řešením dané rovnice je tedy uspořádaná dvojice přirozených čísel:

$$(m;n)=(1;2)$$

Danek

Úloha 4.



Spočítejme nejprve obsah S_1 (hustě šrafovaná část). Tento obsah je roven třetině rozdílu obsahu trojúhelníku a obsahu vepsaného kruhu (protože takové oblasti S_1 jsou tři). Výška trojúhelníku je $\sqrt{3}$ (Pythagorova věta) a poloměr kružnice vepsané je třetinový, tudíž $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$S_1=\frac{1/2\cdot 2\cdot\sqrt{3}-\pi\cdot(\frac{\sqrt{3}}{3})^2}{3}\doteq 0,228$$

Výseč, která je průnikem většího kruhu a trojúhelníku, tvoří 1/6 obsahu tohoto kruhu (úhel 60° je 1/6 z 360°), tzn. pokud od 1/6 obsahu kruhu odečteme obsah S_1, dostaneme obsah vyšrafované části.

$$S=\frac{1}{6}\cdot\pi\cdot 1^2-0,228\doteq 0,3$$

Barča

Úloha 5.
V zadání tohoto příkladu byla chyba, takže takový šestiúhelník neexistuje. Obsah trojúhelníku AEG šel tedy vypočítat různě.

1) Úsečka EC je stejně dlouhá jako úsečka AC, obě měří 4 cm. Jde o pravidelný šestiúhelník, takže úsečka AD půlí úsečku CE a je na ni kolmá. Úsečka EG měří 2 cm. Vypočítáme délku úsečky AG pomocí Pythagorovy věty z trojúhelníku AEG. Délka úsečky AG vyjde $\sqrt{12}$. Obsah trojúhelníku AEG vypočítáme jako:

$$\frac{|EG| \cdot |AG|}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{12}}{2} = \sqrt{12}\,\mathrm{cm}^2$$

2) Označme S střed šestiúhelníku. Je pravidelný, proto je trojúhelník DES rovnostranný. Úsečka EC protíná stranu DS v polovině (protože pata kolmice v rovnostranném trojúhelníku leží ve středu strany). Délka úsečky SG je tedy $|SD|/2 = 2,5/2 = 1.25$ cm. Délka úsečky AG je $|AS| + |SG| = 2,5 + 1,25 = 3,75$ cm. Obsah trojúhelníku AEG vypočteme jako:

$$\frac{|EG| \cdot |AG|}{2} = \frac{2 \cdot 3,75}{2} = 3,75\,\mathrm{cm}^2$$

Plný počet bodů byl udělen za obě řešení nebo za to, že jste přišli na to, že úloha nemá řešení.

Štěpán

Úloha 6.
Když Pavel rozstřihne 101–úhelník na dva menší, je součet vrcholů těchto dvou mnohoúhelníků o dva větší. Počet vrcholů je tedy stále liché číslo, a proto vznikne vždy jeden mnohouhelník s lichým a jeden se sudým počtem vrcholů. Platí to vždy, když se rozstříhává licho-úhelník. Když je na tahu Pavel, vybere si ten mnohoúhelník, který má sudý počet vrcholů. Odstřihne trojúhelník a Vojtovi tak zbydou pouze mnohoúhelníky s lichým počtem vrcholů. A tak bude mít Vojta vždy, když bude na tahu, na výběr pouze z mnohoúhelníků, které mají lichý počet vrcholů. Buď už nebude moci udělat žádný další tah (vyhrál Pavel) nebo tah udělá, rozstřihne mnohoúhelník na 2 další mnohoúhelníky, jeden se sudým a jeden s lichým počtem vrcholů. Pavel si potom vybere ten se sudým a rozstřihne ho dva liché. Tímto způsobem dojdeme do fáze, kdy po Pavlově tahu zbydou jen trojúhelníky a proto nebude moct Vojta táhnout a Pavel vyhraje.

Danek, Ondra

Úvod do pravděpodobnosti

Než začneme se samotnou pravděpodobností, seznámíme se s několika pojmy, které je třeba pochopit.

Náhodný pokus je činnost, kterou můžeme provádět opakovaně a která za stejných podmínek může vést k různým výsledkům. Takovou činností může být například házení hrací kostkou nebo losování různých předmětů. Všechny výsledky, které mohou při pokusu nastat, tvoří **množinu možných výsledků** (značíme ji Ω). Jednotlivé podmnožiny této množiny nazýváme **jevy** (značíme je velkými písmeny). Všechny výsledky se pak dělí na **výsledky příznivé** a **nepříznivé** tomuto jevu.

Ukážeme si tyto pojmy na příkladu hodu jednou hrací kostkou.
Množina možných výsledků má šest prvků – na kostce může padnout šest různých čísel. Prvky množiny výsledků zapíšeme jako $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, počet prvků množiny značíme jako $|\Omega| = 6$. Jev by mohlo být například padnutí šestky, označíme si ho S. Příznivý výsledek je jeden (padnutí šestky), což můžeme zapsat jako $|S| = 1$, nepříznivé výsledky jsou všechny ostatní.

A teď se můžeme podívat na to, co je to vlastně pravděpodobnost. Pravděpodobnost jevu je číslo od nuly do jedné, vyjadřující, jak moc můžeme očekávat, že právě tento jev nastane. Pravděpodobnost jevu, který nenastane nikdy (nemožný jev), se rovná nule. Pravděpodobnost jevu, který nastane vždy (jistý jev), se rovná jedné.

Pravděpodobnost jevu určíme takto: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, tedy jako podíl počtu příznivých a všech možných výsledků.

Ukažme si to na následujících dvou příkladech:

Házíme hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že padne číslo dělitelné třemi?

Nejprve si určíme množinu všech možných výsledků.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$|\Omega| = 6$

V dalším kroku zjišťujeme, které z možných výsledků jsou příznivé danému jevu – která čísla jsou dělitelná třemi.

$T = \{3, 6\}$

$|T| = 2$

Teď už víme vše, co potřebujeme k určení pravděpodobnosti.

$P(T) = \frac{|T|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Pravděpodobnost toho, že na kostce padne číslo dělitelné třemi je tedy $\frac{1}{3}$.

V pytli máme tři různé koule – zelenou, bílou a modrou. Jaká je pravděpodobnost, že vylosovaná koule není zelená?

Možné výsledky:

$\Omega = \{Z, B, M\}$ ... mohu vylosovat zelenou, bílou nebo modrou kouli

$|\Omega| = 3$

Příznivé výsledky:

$A = \{B, M\}$ ... vylosovaná koule není zelená – je bílá nebo modrá

$|A| = 2$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{3}$

Pravděpodobnost, že vylosovaná koule není zelená, je rovna $\frac{2}{3}$.

Péťa, Katka

Výsledkové listiny

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	∑
1.	Dominik	Müller	5	2	-	6	8	3	24	51
2.	Marie	Sabolová	5	5	-	-	8	-	18	33
3.	Matylda	Chvojková	-	-	-	-	-	-	0	2

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	∑
1.	Martina	Černá	5	5	-	7	8	7	32	62
2.	Matěj	Svoboda	2	5	7	4	8	1	27	58
3.	Josef	Kroček	-	-	-	-	-	-	0	28
4.	Alena	Knödlová	-	-	-	-	-	-	0	18
5.	Michal	Maděřič	-	2	-	-	2	-	4	4

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	∑
1.	Pavla	Šimová	5	5	7	7	8	8	40	76
2.-3.	Milan	Holotňák	5	5	7	7	8	7	39	65
	Václav	Verner	5	5	7	4	8	4	33	65
4.-5.	Matyáš	Burda	5	5	7	7	8	7	39	60
	Linda	Tománková	5	3	7	7	8	2	32	60
6.-7.	Anna	Seligová	5	2	2	5	8	-	22	37
	Jáchym	Vohradník	-	-	-	-	-	-	0	37
8.	Alexandra	Seďová	-	-	-	-	-	-	0	25
9.	Zuzana	Hauznerová	1	-	-	7	-	-	8	11
10.	Jakub	Munzar	-	-	-	-	-	-	0	7

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	∑
1.	Ivana	Ludvíková	5	5	-	6	8	7	31	63
2.	Vojtěch	Jozek	5	-	5	3	4	8	25	57
3.	Jana	Dreiseitlová	-	-	-	-	-	-	0	31
4.	Adam	Jemelka	-	-	-	7	8	-	15	20