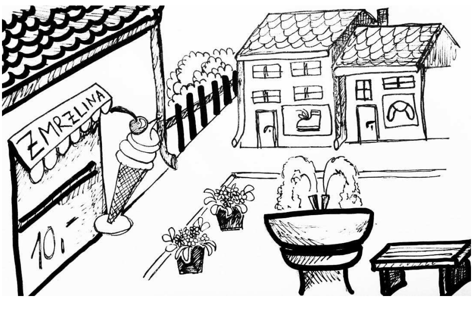
KOKOS

32.ročník ⋆ **2.leták**

Milý řešiteli,
blíží se čas Vánoc a my Ti nadělujeme pod stromeček po perníčcích a kokosu vonící sérii. Na všech šest příkladů máš čas až do 20. ledna. V sérii najdeš také autorská řešení, výsledkové listiny a jako bonus matematický Piroh. Přejeme Ti hodně kulišáckých nápadů při řešení úloh, veselé Vánoce a šťastný nový rok 2020!

Zadání úloh

Skrz otevřené okenice se do Lukášova pokoje začaly pomalu prodírat první ranní paprsky. Lukáš jim nevěnoval nejmenší pozornost. A jak by taky mohl? Byl stále ještě ve světě, kde se neznámé snoubí s nepravděpodobným, ve světě snů. A byl by tam ještě pěknou chvíli, kdyby ho neprobudil jemný smích. Lukáš pomalu otevřel oči a krátkou chvíli zíral na noční stolek, tu chvíli, kterou nám trvá uvědomit si, proč se nedíváme na to obvyklé panorama výhledu z naší postele. Mile potěšen vzpomínkou na příjezd na chatu pravou nohou vykročil z postele a do nového dne. Vyrazil za zvukem smíchu dolů po schodech. Okolo stolu tady již seděli jeho kamarádi. Byli zrovna uprostřed snídaně, krom Vaška, který žongloval se čtyřmi sklenicemi od marmelády. Příchod Lukáše ho bohužel natolik rozhodil, až se mu zapletly ruce a sklenice se rozlétly všemi směry. První si to zamířila přímo na pohovku, druhá trefila Toma do ramene a díky tomu pak lehce dopadla na stůl. Ta třetí se rozletěla přímo na Lukáše a ten ji s pohotovostí fotbalového brankáře snadno chytil. Poslední se hlasitě roztřískla o podlahu. „Aaah,“ povzdychl si Vašek. „Dobré ráno,“ pozdravil Lukáš.



Potom, co uklidili rozbité sklenice, usedli ke stolu. „Co dnes podnikneme?“ ptal se Lukáš. „Mohli bychom zajít do města,“ navrhovala děvčata. „Vy tomu říkáte město?“ ušklíbl se na to Tom. „Je malé, ale i tak toho může spoustu nabídnout!“ bránil čest městečka Vašek. „Je tady náhodou jedna moc zajímavá zvláštnost. Bydlí tady jeden postarší pán, bývalý matematik a prý jeden z nejlepších!“ „Jo, a co s tím?“ opáčil Tom. Vašek mírně pozvedl obočí, nahlas vydechl a pokračoval: „Je to legendární Vladimír Cvrček, autor mnoha neuvěřitelných matematických teorií a objevitel světoznámého Cvrčkova bodu.“ „No nekecej!“ na to ostatní. „Vážně! A to není všechno. Nedávno dokončil velice zajímavý hlavolam. Je to série úkolů pro tým pěti matematiků. Chcete to zkusit?“ Na tohle se ani ptát nemusel. Ovšem, že to chtěli zkusit.

Plán na dopoledne byl tedy jasný. Po snídani se vydali do města. Telgart bylo malebné horské městečko. Nežilo zde mnoho obyvatel, nehemžilo se to tam turisty, ale bylo tam vše, co jste si dokázali představit nebo po čem jste jen mohli během prázdnin zatoužit. Na velkém náměstí byly rozházeny krámky s nejrůznějším zbožím. V městečku bylo i krásné kino a plavecký bazén. Naši hrdinové ale zamířili ke stánku s tou nejlepší zmrzlinou. Z náměstí a s vynikající vanilkovou zmrzlinou se vydali malebnými uličkami směrem k domu pana Cvrčka. Po chvíli dorazili k útulnému domku s malou zahrádkou, kde zrovna postarší, mile vyhlížející paní vytahovala ze země jiřiny. Vašek se chopil iniciativy a přes plot ji pozdravil: „Dobrý den, je doma pan Cvrček?“ „Dobrý den!“ přidali se i ostatní. Babička se s úsměvem otočila. „Ahoj, děti. Jistě, že je doma. Pročpak ho sháníte?“ ptala se. „Chceme vyřešit jeho nový hlavolam.“ odpověděl sebevědomě Lukáš. „No to bude mít Vláďa radost, hned vám ho zavolám. Posaďte se prosím zatím tady na lavičku.“ prohodila s úsměvem babička a vešla do domu.

Po chvíli přišel postarší pán s lysinou na hlavě, velkými kulatými brýlemi, přátelským úsměvem a vítal nově příchozí: „Zdravím vás, přátelé, přišli jste zkusit vyřešit můj hlavolam?“ „Ano, pokud můžeme,“ odpověděla Terka. „Ale jistě, jistě, pojďte za mnou, vážení,“ mával na ně rukou pan Cvrček a vydal se po cestičce kolem domku. Družina ho následovala. Pan Cvrček byl jejich návštěvou velmi nadšený. Říkal, že už dlouho jeho hlavolam nikdo řešit nepřišel. Prý již totiž všichni matematiky znalí z Telgartu a okolí (a že jich ale nebylo mnoho) hlavolam řešit zkusili, ale nepodařilo se nikomu dojít dále než k třetímu úkolu. Pan Cvrček s nimi dorazil až k budově velikosti větší kůlny a povídá: „Vaším úkolem je vyřešit sérii hlavolamů v místnosti. Je to série po sobě jdoucích matematických úkolů, každý vede vždy k dalšímu, který je o něco obtížnější, až vám nakonec ten šestý prozradí velké matematické tajemství. Ale pozor! Jakmile vstoupíte, začne se Vám odpočítávat čas, a toho nebudete mít mnoho. Pouze 31,415 minut. Jste připraveni?“

Připraveni byli, a tak už jim jen pan Cvrček popřál hodně štěstí a vstoupili do místnosti. Celé jí dominoval velký stůl s archy papírů a psacími a rýsovacími potřebami. „Škoda, že jsem si nevzal svoji kalkulačku,“ povzdychl si Tom, jakmile si všiml absence jeho oblíbené matematické pomůcky. Na bočních stěnách visely různé panely a přímo naproti vchodu běžel na velkých hodinách odpočet a pod ním zadání prvního příkladu zářící na obrazovce a u ní terminál k zadávání výsledků.

Úloha 1. (5 bodů): Nalezněte všechna přirozená čísla menší než 200, jejichž druhá mocnina je zároveň dělitelná 4, 5, 6, 9 a 10.

S příkladem se vypořádali velmi rychle a zadali odpovědi do přístroje. Z panelu vyjela malá kulička, projela kyvadlem a rozbila červeně svítící žárovku. Pokračovala přes vypínač, který zapnul zelenou a nakonec zajela někam za stěnu. Hned poté se napravo na zdi objevil na nově odkryté dřevěné tabuli umělecky vyrytý příklad.

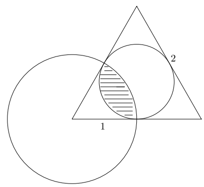
Úloha 2. (5 bodů): Ve skupině osmi lidí existuje právě 22 dvojic známých. Vztah "znát se" je vzájemný, tzn. jestliže osoba A zná osobu B, pak B zná A. Pokud se kdokoliv ze skupiny dozví nějakou zprávu, řekne ji všem svým známým. Dokažte, že se tímto způsobem zprávu dozví nakonec všichni.

Tento příklad už byl o něco těžší, ale pro Vaška, který měl tento druh příkladů s kombinatorickým nádechem velmi rád, to nebyl žádný problém. Tentokrát zajel celý panel se zadáním do stěny, poté se otočil naopak a ukázalo se tak zadání dalšího příkladu.

Úloha 3. (7 bodů): Pro všechna přirozená čísla n, větší nebo rovna 2, definujme $f(n)$ jako nejmenší prvočíslo, které dělí n. (například $f(15) = 3$; $f(5) = 5$) Potom řešte rovnici $n^2 + 2f(n) + 1 = (2m + 1)^2$, kde m, n jsou přirozená čísla větší nebo rovna 2.

Poté, co příklad Katka úspěšně vyřešila, se Lukáš zaradoval: „Taaak, jde to dobře: prvních šest minut – první tři příklady. Bude to ještě jednodušší, než jsem čekal!“ „Nevzlátej!“ na to Katka „Ešče daleka nejsme u konca, chalani, može to být ešče o dost těžší – je to přeca pán Cvrček. Na to nezapomínaj.“ A za chvíli opravdu litoval svých slov, nalevo se totiž objevil ten nejďábelštější geometrický příklad, co do té doby viděl.

Úloha 4. (7 bodů): Do rovnostranného trojúhelníku o délce strany 2 je vepsána kružnice. Větší kružnice na obrázku má střed v jednom z vrcholů trojúhelníku a poloměr roven polovině délky strany trojúhelníku. Jaký je obsah vyšrafované části?



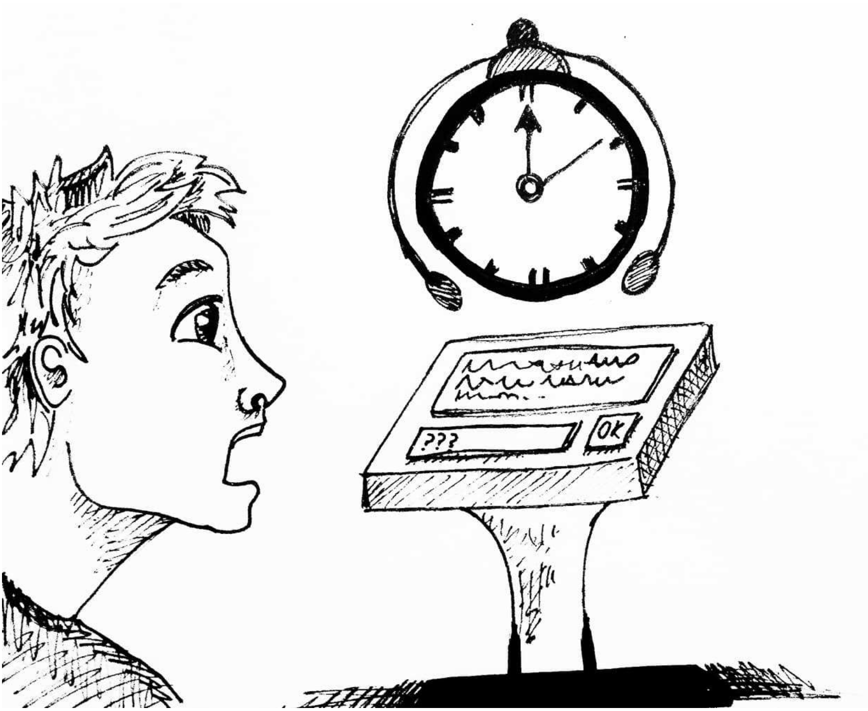
Na příklad naštěstí zanedlouho přišel Tom, který si podobné příklady s kružnicemi běžně maže na pizzu. Ke zklamání a zděšení Lukáše, který nemá geometrii zrovna v lásce, se na levé stěně objevilo planoucí zadání dalšího příkladu, ještě těžšího než byl ten předchozí.

Úloha 5. (8 bodů): Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Délka úsečky AE je 4 cm, délka úsečky AD je 5 cm. Vypočítejte obsah trojúhelníku AGE, kde G je průsečík úseček AD a CE.

Tak s tímto příkladem si lámali hlavu pěkně dlouho. Zbývalo jim dokonce jen posledních 6 minut, když důvtipná Terka správně odhadla, jakým způsobem je třeba při řešení přemýšlet. Z podlahy vystoupil pilíř se závěrečným zadáním. Teď jde o všechno – jeden příklad, 6 minut.

Úloha 6. (8 bodů): Pavel a Vojta si z papíru vystřihli konvexní 101-úhelník. S ním pak hrají následující hru, začíná Vojta, ten rozstřihne 101-úhelník podél nějaké z úhlopříček na dva menší mnohoúhelníky, pak si Pavel vybere jeden z mnohoúhelníků, které jsou na stole, a opět ho rozstřihne podél některé další úhlopříčky, atd. Prohraje ten, kdo už nemůže udělat tah. Kdo má vyhrávající strategii a jakou?

Na časomíře zbývalo posledních několik sekund, když Lukáš přišel se svým řešením. Zadal ho včas? Bylo správně? Odpočet se zastavil a zhasnul. Všichni strnuli napětím a místností se rozezněl tikot hodinek...



c

*Řešení úloh 2. série posílejte do **20.1.2020** na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 01 Bílovec

Autorská řešení 1. série

Úloha 1.

Hledané číslo x je součinem dvou činitelů - čísla 1617 a čísla, o kterém můžeme s jistotou tvrdit, že je pouze dvojciferné (při vynásobení 1617 nejmenším trojciferným číslem 100 by výsledkem bylo číslo šesticiferné, což již neodpovídá zadání). Víme, že x končí nulou, je tedy dělitelné 2 a 5. Jelikož 1617 dělitelné těmito čísly není, můžeme tuto vlastnost přisoudit druhému z činitelů. Činitelem je tedy číslo z množiny $\{10, 20, 30, ..., 90\}$. Pro nalezení původního čísla x vynásobíme možné činitele s 1617:

$$
\begin{aligned}
1617 \cdot 10 &= 16170 \neq x \quad \text{- nevyhovuje podmínkám ze zadání} \\
1617 \cdot 20 &= 32340 \neq x \\
1617 \cdot 30 &= 48510 \neq x \\
1617 \cdot 40 &= 64680 \neq x \\
1617 \cdot 50 &= 80850 \quad \text{- vyhovuje podmínkám ze zadání.}
\end{aligned}
$$

Původní číslo je 80 850.

Zuzka J.

Úloha 3.

Označme si úhly při vrcholech A, B, C jako α, β, γ. Z pravoúhlých trojúhelníků $\triangle APY$, $\triangle BPX$ plynou rovnosti $\alpha = 90° - |\sphericalangle APY|$, $\beta = 90° - |\sphericalangle BPX|$. Jejich sečtením dostaneme $\alpha + \beta = 180° - (|\sphericalangle APY| + |\sphericalangle BPX|) = 180° - 35° = 145°$. Protože je součet vnitřních úhlů trojúhelníku 180 stupňů, má hledaný úhel $\gamma = |\sphericalangle ACB|$ daného $\triangle ABC$ velikost $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 145° = 35°$.

Bára

Úloha 4.

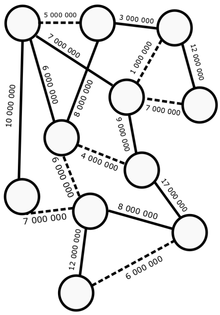
Uvědoměme si, že po dobu dvou hodin (4:00 a 14:00) se každý den číslice 4 objeví na pozici hodin. To odpovídá 120 minutám. Ve zbylých 22 hodinách dne se číslice 4 objeví na jednu minutu právě patnáctkrát v každé z těchto hodin: 04, 14, 24, 34, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 54. Časový úsek, kdy bude čtyřka na pozici minut (ale ne na pozici hodin) vypočítáme jako $15 \cdot 22 = 330$.
Celkový počet minut za den, kdy svítí alespoň jedna číslice 4 je 450 minut.

Terka

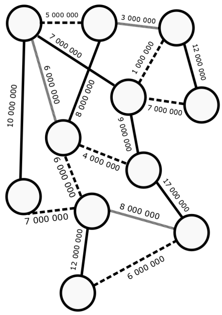
Úloha 2.

Pro řešení příkladu lze využít tzv. *Borůvkova algoritmu.* Jde o logický postup, jak postupně vybrat tu doopravdy nejvýhodnější cestu. Skládá se z konečného počtu kroků, který vás dovede k celkovému řešení.
1. krok - Pro každý bod sítě vyberete spoj s nejnižší hodnotou. Může se stát, že pro oba ze dvou bodů bude nejvýhodnější jejich vzájemná spojnice.
2. krok – Vybíráte spoj, podobně jako v 1. kroku, ale místo vybírání spojnice pro každý bod teď vybíráte spojnice mezi skupinami vzájemně již propojených bodů.

Krok 2. opakujete, dokud všechny body nejsou propojeny. V tomto konkrétním případě dvakrát.



po prvním kroku



po druhém kroku
(spoje jsou šedou)

Poté stačí již jen sečíst vybrané spojnice, a můžeme si být jisti, že jsme vybrali tu nejlepší možnou cestu. Nejnižší možný součet je 53 000 000.

Ondra

Úloha 5.

Označme celkový počet kuliček jako x. Víme, že Petr měl o 8 kuliček méně než byla polovina všech kuliček. Můžeme to zapsat jako $x/2-8$. Pavel měl pětinu kuliček a ještě 3 k tomu, což zapíšeme ve tvaru $x/5+3$. Dále víme, že Patrik měl na konci hry o polovinu méně než Petr, dostaneme $(x/2-8/2$. Poslední Pepa má o kuličku více než Patrik, jeho počet kuliček tedy vyjádříme jako $(x/2-8)/2+1$.
Sestavíme rovnici, do které dosadíme jednotlivé počty kuliček vyjádřené pomocí

neznámé x:

$$x = (x/2 - 8) + (x/5 + 3) + [(x/2 - 8)/2] + [(x/2 - 8)/2 + 1]$$

Pomocí ekvivalentních úprav dojdeme k rovnici $x = 60$.
Nyní můžeme 60 dosadit za x do všech čtyř rovnic (počty kuliček jednotlivých chlapců). Zjistíme, že Petr měl 22, Pavel 15, Patrik 11 a Pepa 12 kuliček.

Štěpán

Úloha 6.
Trojúhelník není skoro pravoúhlý, pokud žádný z jeho vnitřních úhlů nenabývá hodnoty x, kde $75° < x < 105°$.
Trojúhelník není skoro rovnoramenný, jestliže absolutní hodnoty vzájemných rozdílů velikostí jeho vnitřních úhlů jsou větší než 15°.

Existenci takové trojúhelníku nejlépe dokážeme jeho konstrukcí. Zvolíme úhel α v souladu s první podmínkou (α je v mém řešení označení největšího úhlu v trojúhelníku... tím nevylučuji jiné značení v řešeních). Nyní mohou nastat dvě situace:

1.) $\alpha < 75°$
podle druhé podmínky musí být další z úhlů v trojúhelníku β maximálně ostře menší než 60° a poslední γ musí být maximálně ostře menší než 45° (*ostře menší* =< znamená, že se hodnota blíží jiné hodnotě ale nikdy ji nedosáhne). Součet krajních hodnot je 180 stupňů, proto každy trojůhelník u nějž zvolíme $\alpha < 75°$ má součet velikostí vnitřních úhlů menší než 180 stupňů a nelze jej sestrojit.
(například: $\alpha = 74$, $\beta = 74 - 16 = 58$, $\gamma = 58 - 16 = 42$, $\alpha + \beta + \gamma = 174°$)

2.) $\alpha > 105°$
druhá podmínka vůči úhlu α je předem splněna, protože mezi úhly β a γ rozdělíme maximálně 75° ($105° - 75° = 30°$). Úhly β a γ musí nabývat velikostí rozdílných minimálně o 15 stupňů, proto je nelze nalézt pro úhel $\alpha > 165°$.
V případě, že $105° < \alpha < 165°$ lze vždy zbytek $180° - \alpha$ rozdělit mezi β, γ tak, že jsou splněny obě podmínky.

Lze sestrojit trojúhelník dle zadání.

Max

poznámka: *skoro rovnoramenný* popřípadě *skoro pravoúhlý* je terminus technicus vytvořený přímo pro potřeby úlohy, proto není potřeba spekulovat o jeho relevantnosti.

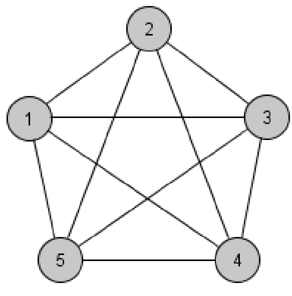
Teorie grafů

V prvním letošním pirohu se budeme věnovat grafům. Ze školy možná znáte grafy funkcí jako $f(x) = 2x$. Pro nás bude ***graf*** znamenat konečnou množinu (jejím prvkům budeme říkat ***uzly*** a značit je kroužky) spolu s některými dvojicemi jejích prvků (těm budeme říkat ***hrany*** a znázorňovat je spojnicemi příslušných uzlů). Dobrým ilustračním příkladem je například schéma železničních linek, ve kterém jsou města (uzly) vzájemně propojená železnicí (hranami).

Definice pojmů:
Graf je uspořádaná dvojice (V, E) (V - množina vrcholů, E - množina hran). Hrany zapisujeme jako dvojice vrcholů např. (x, y) - znamená, že existuje hrana spojující vrcholy x a y.
Množina je soubor libovolných prvků. Zápis množiny může vypadat následovně: $M = \{1, 2, 3\}$. Tímto jsme popsali množinu označenou "M", která obsahuje tři prvky: čísla jedna, dva a tři.

Maximální počet hran grafu

Nyní odvodíme vztah pro maximální počet hran v závislosti na počtu vrcholů. Označme počet vrcholů jako n. Každý vrchol můžeme spojit $(n-1)$ hranami s ostatními vrcholy. Dostáváme $n(n-1)$ hran. Protože jsme však pracovali s uspořádanými dvojicemi vrcholů, je každá hrana započítána do tohoto součtu dvakrát. (Hrana spojující dvojice vrcholů (v_1, v_2) a (v_2, v_1) je jedna a ta samá.)
Proto počet všech hran bude $\frac{n(n-1)}{2}$.

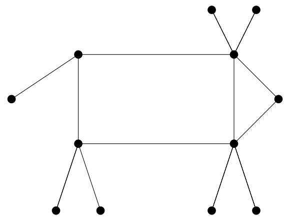


Obr. 1: hrany

Grafy můžeme rozlišit na orientované, kde záleží na směru hrany (u silniční sítě bychom brali jako orientované hrany jednosměrné ulice), a neorientované grafy, kde na orientaci hrany nezáleží (u silniční sítě silnice bez omezení). Nyní se budeme věnovat pouze neorientovaným grafům a vysvětlíme důležité pojmy z této oblasti.

Stupeň uzlu

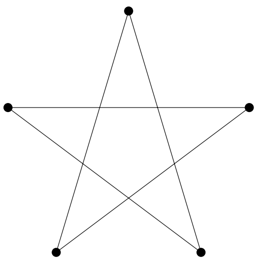
Stupněm uzlu budeme rozumět počet hran, které z něj vycházejí. Sečteme-li stupně všech vrcholů, započteme každou hranu dvakrát, protože každá hrana spojuje právě 2 uzly. Součet stupňů všech vrcholů je roven dvojnásobku počtu hran. V grafu uvedeném níže (viz obr. 2) najdeme 7 uzlů stupně 1, po jednom uzlu stupně 2, stupně 3 a 4, 2 uzly stupně 5. Součet stupňů tohoto grafu je $7 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 26 = 2 \cdot 13$. To odpovídá skutečnosti, že je v grafu zakresleno 13 hran.



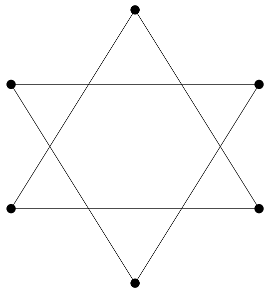
Obr. 2: uzly

Souvislý graf

Souvislým grafem rozumíme graf, ve kterém se dá z každého uzlu "přejít" po hranách do libovolného jiného vrcholu (obr. 3). Není-li graf souvislý, rozpadá se na několik souvislých částí, tzv. komponentů (obr. 4).



Obr. 3: souvislý graf



Obr. 4: nesouvislý graf

Mějme množinu všech vrcholů $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Rozlišujeme několik typů souvislých grafů:

- **Úplný graf** – Úplný graf (značíme K_n) je souvislý graf, ve kterém jsou všechny uzly stupně $n-1$. Počet jeho hran vypočítáme jako polovinu součtu všech stupňů:

$$E_{K_n} = \frac{n(n-1)}{2}$$

viz obr. 1

- **Cesta** – Cesta (značíme P_n) je souvislý graf se dvěma krajními uzly stupně 1, zbývající uzly jsou stupně 2.

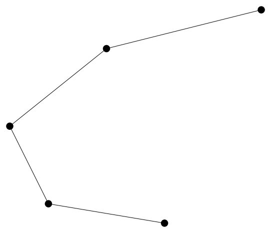
$$E_{P_n} = \{(1,2),(2,3),\ldots,(n-1,n)\}$$

viz obr. 5

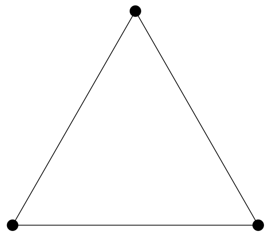
- **Kružnice** – Kružnice (značíme C_n) je souvislý graf, ve kterém mají všechny uzly stupeň 2. Má smysl pro $n \geq 3$. Počáteční vrchol je zároveň vrcholem konečným, množinu jeho hran můžeme zapsat takto:

$$E_{C_n} = \{(1,2),(2,3),\ldots,(n-1,n),(n,1)\}$$

viz obr. 6



Obr. 5: typ cesta



Obr. 6: typ kružnice

Úlohy na procvičení:

1. Pro která $n \in N$ platí $K_n = P_n,\ K_n = C_n,\ P_n = C_n$?
2. Je graf z obr. 3 úplný?
3. Kolik cyklů obsahuje graf na obr. 1?
4. Kolik cyklů je na obr. 2?
5. Je graf na obr. 6 úplný?

Kuba

Výsledkové listiny

Tady najdete jen několik nejlepších řešitelů, pro úplné výsledkové listiny se podívejte na naše internetové stránky.

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Dominik	Müller	8	0	6	6	5	2	27	27
2.	Marie	Sabolová	8	0	-	-	0	7	15	15
3.	Matylda	Chvojková	2	0	0	0	0	0	2	2

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Matěj	Svoboda	8	0	6	6	5	6	31	31
2.	Martina	Černá	8	1	3	6	5	7	30	30
3.	Josef	Kroček	5	0	6	6	5	6	28	28
4.	Alena	Knödlová	6	7	-	5	0	-	18	18

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Jáchym	Vohradník	5	8	6	6	5	7	37	37
2.	Pavla	Šimová	8	4	6	6	5	7	36	36
3.	Václav	Verner	8	0	6	6	5	7	32	32
4.	Linda	Tománková	8	7	3	2	5	3	28	28
5.	Milan	Holotňák	8	-	6	6	5	1	26	26
6.	Alexandra	Seďová	8	-	6	6	-	5	25	25
7.	Matyáš	Burda	7	0	3	6	5	-	21	21
8.	Anna	Seligová	8	0	2	4	0	1	15	15
9.	Marie	Sobolová	-	-	3	6	-	-	9	9
10.	Zuzana	Hauznerová	0	-	3	-	-	-	3	3

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.-2.	Vojtěch	Jozek	8	0	6	6	5	7	32	32

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
	Ivana	Ludvíková	8	0	6	6	5	7	32	32
3.	Jana	Dreiseitlová	8	-	6	5	5	7	31	31
4.	Adam	Jemelka	-	-	-	-	5	-	5	5