KOKOS

23.ročník ⋆ **4.leták**

Víkendovka s KoKoSem

Milý řešiteli, přichází jaro a s ním i další KoKoSová série. Dlouhodobější řešitelé jistě ví, že s jarem přichází i další KoKoSová akce a tou je Víkend s KoKoSem. Rádi bychom Tě tímto na tuto akci pozvali! Uskuteční se 1. 4. – 3. 4. 2011 v budově Domova mládeže při Gymnáziu Mikuláše Koperníka v Bílovci. Jedná se o akci dost podobnou soustředění – proto můžeš čekat program plný zajímavé matematiky, akčních her a nových zážitků s přáteli!

Cena, stanovena na 150,-Kč, zahrnuje veškerý program včetně stravy a ubytování. Jakékoliv dotazy zodpovíme na našem emailu *gmkkokos@seznam.cz*. Pokud máš zájem, neváhej a co nejdříve vyplň naši internetovou přihlášku, kterou najdeš na *http://kokos.gmk.cz/soustredeni-prihlaska*.

Paralelně s naší víkendovkou bude probíhat ještě jedna akce, na kterou bychom tě taktéž chtěli upozornit. Na konci série je otištěn leták, ve kterém najdeš bližší informace. Nenech se však splést totožným časem a místem obou akcí. Jsou to dvě, na sobě nezávislé akce.

Organizátoři

Zadání úloh

Po dvou dnech strávených ve Willy stihl Billy nasbírat tolik zážitků, že by to vystačilo na slušný román. První kapitola byla poněkud chmurná, proložena řadou nezdarů a postupně se prohlubující depresí. Druhá kapitola se dotkla uspěchaného a neuváženého rozhodnutí přijmout obchodní nabídku od slečinky, která se jakoby náhodou právě objevila v Billyho oblíbené kantýně. A v zatím poslední kapitole potkal Billy Trolla. Pro osvěžení paměti podotkněme, že obyvatelé Willy nemají ve slovníku výraz pro „obvyklý“, a proto snad už nikoho nepřekvapí, že výška Trolla sahá za hranice lidské představivosti. Míra Trollova intelektu by mohla být považována za základní a dále nedělitelnou jednotku prostoduchosti, byl to však výjimečný společník na Billyho obchodní cestě s výpočetní technikou. Moc toho nenamluvil a ochotně nesl Billyho i s kufry velice prudkým kopcem vstříc odlehlejší části Willy.

Úloha 1. (6 bodů): Billy si všiml, že už prošli okolo druhého podivného hnízda zavěšeného ze stromu. Tato dvě hnízda patřila létajícím živočichům. Byla od sebe vzdálena 3000 metrů. Tito létající živočichové zrovna řešili jeden problém – potřebovali přenést z jednoho hnízda na druhé 200 000 plodů. Určili si mezi sebou

3 nosiče, kteří mají tento úkol splnit. První nosič unesl 700 plodů najednou a létal rychlostí 800 $\frac{m}{hod}$. Druhý nosič unesl najednou jen 500 plodů, ale zato létal rychlostí 1200 $\frac{m}{hod}$. Třetí nosič unesl 250 plodů a létal rychlostí 2500 $\frac{m}{hod}$. Tito tři nosiči měli vystartovat z toho hnízda, na které mají všechny plody shromáždit. Otázkou zní, jak dlouho jim tento úkol bude trvat, a který z nosičů přenese nejvíce plodů, za předpokladu, že všichni tři létají stále konstantní rychlostí.

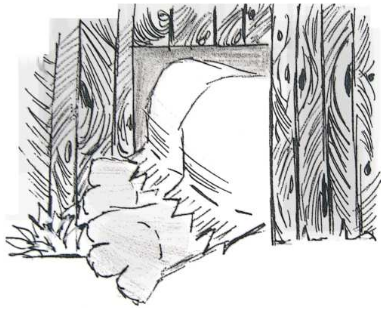
Nebudeme raději zabíhat do komplikované a značně nepřehledné historie Willy, ale napravme raději jednu zeměpisnou nepřesnost. Svět, ve kterém se vesnice nacházela, tvořily tři kopce oddělené smrdutou Skorořekou. Ten, na kterém se Billy ocitnul po svém přemístění, tvořil městskou část zvanou Soft a kopec, který se teď snažil spolu s Trollem zdolat, příslušel ke čtvrti Micro. Škoda, že se architektovi nedostalo dostatku invence, aby dokončil most spojující obě části, mohla tak vzniknout docela pěkná čtvrť.

Billy byl moc rád, že nemusí šlapat prudký kopec, a pohodlně se uvelebil na ramenou Trolla. Přeci jen byly kameny na pěšince na jeho vkus příliš ostré, svah nepřiměřeně prudký a slunce se rozhodla rozpálit okolní krajinu téměř do běla. Ač se skoro nehýbal, řinul se z jeho čela nepřetržitý proud potu. Vzhlédl k obloze, odkud nesnesitelný žár přicházel, a s hrůzou si uvědomil, že dvě slunce se zaručeně pohybují po kolizní dráze a nezadržitelně se blíží něco Velkého. Čím blíže se slunce nacházela neodkladné srážce, tím více tepla vyzařovala.

Úloha 2. (5 bodů): Billymu se zdálo, že z toho všeobklopujícího vedra začal na vteřinku blouznit. Zničehonic před sebou uviděl výjev z dětství – ve škole měli 55 % chlapců a 45 % dívek. Když jednou jeli na školní výlet, tak 15 % všech dívek a 5 % všech chlapců jelo vlakem. Billy se snažil vzpomenout si, kolik dívek a kolik chlapců tehdy jelo vlakem. Vzpomněl si ještě, že ve škole určitě nestudovalo více než 400 dětí.

Billy pozoroval nebeský výjev tak dlouho, až si dokonce i Troll uvědomil, že jeho parťáka něco velice zaujalo. Chvíli se snažil přemýšlet, která slova by byla pro tuto situaci nejvhodnější, a po urputném snažení z něj vypadla věta: „Za chvíli Polbum my pudem se schovat a péci maso.“ Billy si nebyl úplně jist, jestli my a maso nejsou náhodou synonyma, protože díky výhni nastávajícího Polbumu se rozhodně pekl.

Troll mírně sešel z vyšlápnuté pěšinky a ubíral se teď spíše po vrstevnici než k vrcholu kopce. Pokud měl lehce omezené vyjadřovací schopnosti, pak jeho smysl pro orientaci musel tento drobný handicap vynahrazovat, protože v pusté krajině nebylo známky po orientačních bodech. I přes chybějící rozcestníky a turistické značení Troll neomylně dorazil k polorozpadlému stavení. Na místní poměry se muselo jednat o významnou budovu, protože byla navržena ve velkorysých rozměrech průměrně rostlého člověka. Billy neměl problém vejít se dovnitř, zato Troll musel pokleknout a pracně se nasoukat přes práh domu. Na to, jak



okázalá stavba to musela pro místní být, překvapil Billyho její interiér. Dokonce i Troll by byl schopen se přesně vyjádřit o vybavení budovy. Shrnul by to souslovím nic a Díra a opravdu by nebylo nutné cokoliv dodávat.

Úloha 3. (8 bodů): Snad bychom však měli dodat, že na zdi interiéru bylo napsáno šest rovnic.

$$3 \bullet 3 = 9 \qquad 3 \oplus 4 = 5$$
$$5 \bullet 5 = 7 \qquad 3 \oplus 6 = 19$$
$$7 \bullet 7 = 4 \qquad 5 \oplus 7 = 23$$

Nebyly to však úplně normální rovnice. Místo klasických početních operací, jako součin, podíl, součet a rozdíl, se v těchto rovnicích objevovaly jiné, zřejmě místní početní operace. První se značila černým kolečkem: „$\bullet$“ a druhá byla označena tímto znakem: „$\oplus$“. Billy z těchto šesti rovnic lehce pochopil, jak tyto početní operace fungují, a snadno vypočítal příklad $(8 \bullet 9) \oplus (7 \bullet 8) = ?$. To bude také vaším úkolem. (Tyto početní operace mohou fungovat zcela libovolně. Např. početní operace hvězdička „$*$“ může znamenat, že čísla, se kterými tuto operaci provádíme, musíme sečíst, výsledek umocnit a počet cifer takto upraveného čísla bude výsledkem operace hvězdička.)

Ač byl Troll v místnosti značně namačkán, začal se ve stísněném prostoru hemžit a přehrabovat se ve své torně, až konečně nalezl to, co hledal. Vytáhl obrovskou kýtu masa a gurmánsky si k ní přivoněl. Přidal ještě nespecifikovatelné koření a s neskrývanou radostí vyhodil kýtu před práh budovy. Billy naprosto nechápal, proč tak krásný kus masa hodil do prachu přede dveřmi, až to najednou udělalo Bum.

Tak jako každý den i dnešek nebyl výjimkou a v době oběda nastal Polbum. Dvě slunce se tak dlouho proháněla po obloze, až došlo k nevyhnutelné srážce. Jestliže se ještě někde v okolní vysušené krajině nacházela kapička rosy, Polbum ji nelítostně vysušil a zemí se rozšířila oslepující vlna bílého záblesku. Billy neměl na rozdíl od Trolla žádnou zkušenost s Polbumem, a proto mu brilantnost průvodcova masového počínání došla až ve chvíli, kdy místnost provoněla čerstvě připravená pečínka.

Zavést podobný přírodní úkaz na Zemi mohli by se všichni televizní kuchaři jít vycpat. Maso bylo propečené až na kost, krásně vonělo a mohlo se ihned servírovat. To vše s přípravou zvládnutou do pěti minut. Na to by se snad nemusela ani dělat reklama, jak rychle by se Polbum prodával. Billy s Trollem se spokojeně pustili do jídla, a jakmile se Billyho oči vzpamatovaly z utrpěného světelného šoku, začaly zvědavě prozkoumávat místnost.

Ke zkoumání toho nebylo moc. Jednak velikou část místnosti vyplňoval krmící se Troll svým neskladným tělem, a pak zde opravdu nebylo nic k vidění. V koutu v podlaze zela dosti hluboká díra a u ní cedulka s poučením o použití.

Úloha 4. (6 bodů): Billymu se při pohledu na Díru jako obvykle v hlavě utvořila otázka. Díra měla otvor ve tvaru čtverce a Billy si všiml, že se v díře zpříčila nějaká tyč. Můžeme říct, že stěny části díry tvoří krychli $ABCDEFGH$ a tyč leží mezi vrcholy E a C (tvoří tělesovou úhlopříčku). Billyho zajímalo, jaký úhel svírá tyč s obdélníkem $ABGH$.

Billy rozhodně nepotřeboval spořádat desetikilovou kýtu na počkání a nechal Trolla v klidu přežvykovat jedno sousto za druhým. Připlazil se k cedulce a začal pomalu číst.

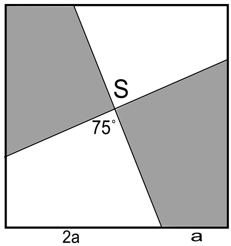
Hned v úvodu sdělení bylo větším a hlavně krvavě červeným písmen napsáno, že si dotyčný má opravdu dobře rozmyslet, jestli chce Díru použít. Dále následovaly obvyklé řeči o tom, jak provozovatel nenese žádnou odpovědnost za způsobené škody nesprávným využíváním přístroje a tak podobně, až se člověk propracoval k té nejdůležitější části. Nový odstavec třetího bodu začínal opět zvýrazněným upozorněním, že z Díry si člověk může odnést jenom jedinou věc. A pokud bude chtít Díru v budoucnu opakovaně využít, musí s sebou vypůjčenou věc vzít, vrátit ji na místo odkud ji vzal, a teprve potom si může vzít jinou avšak opět jedinou věc. Billyho pozemská zkušenost s dírami mu bránila v představě, jak by se taková věc mohla vůbec využívat. Přeci jen, pokud na Zemi něco hodíte do díry, většinou už to nechcete zpět, natož abyste se do díry sami vydali a mysleli na poměrně složitý návod k použití. Chtěl tedy pokračovat ve čtení cedulky dále k nějakému praktickému příkladu, ale to už odkápla poslední Trollova slina na podlahu a Billy byl ze svého zaujetí vyrušen.

„To je Díra," vypustil Troll ze svých úst sice gramaticky správnou, leč mírně bezobsažnou větu. Billyho sdělení lehce popudilo, protože mu nepřineslo žádnou novou informaci, a navíc jej vytrhlo z činnosti, která mu kýžené rozuzlení mohla přinést. Snažil se Trolla ignorovat, ale ten opět propadl záchvatu povídavosti a začal odříkávat jednu krkolomnou větu za druhou. Jeho hlas zněl jako stará gramofonová deska, skřípal a za každým víceslabičným slovem přeskočil na začátek věty. Bylo to tak na nervy jdoucí, že se Billy už vůbec nemohl soustředit na cedulku. Uvelebil se na okraji Díry a pokusil se filtrovat Trollův monolog od nicneříkajících skřeků.

Úloha 5. (7 bodů): Dejme tomu, že Troll má ve své slovní zásobě právě tři různá trojslabičná slova a právě pět různých dvojslabičných slov. Kolik různých vět může Troll z těchto slov vytvořit tak, aby každá věta obsahovala právě 5 slabik, tedy dvě různá slova? (Jedno slovo může být použito ve více větách.)

Asi po hodině hledání těch správných slov se dostali k jádru věci a Troll se pustil do popisování svého prvního zážitku s Dírou. Přeloženo do plynulé řeči se to odehrálo asi takto: Troll byl sice od narození nadmíru rostlý chlapík, ale co jej udělalo tak obrovským, byla až jeho dubová palice. Ve Willy k ní přijít nemohl, protože v tak suché oblasti stěží rostl chatrný keřík natož pěkně tuhé dřevo, ze kterého byla palice evidentně vyrobena. Na druhou stranu, i kdyby Trollovi někdo pomáhal zvládnout něco tak komplikovaného, jako pořídit si značně nedostatkové zboží, to nebylo v Trollových možnostech. Zbývala tak jediná a vcelku jednoduchá možnost. Udělat hop, přát si dubovou palici, po dopadu ji popadnout, moc se nerozhlížet, však ono to po čase udělá samo zase poh a budeš zpátky co by dup. To by zvládl i takový Troll.

Inu i tak bylo provedeno a Troll získal svou milovanou a TÁÁÁÁKHLE velkou palici. Slovo TÁÁÁÁKHLE bylo třeba nutno doplnit náležitým rozpřažením rukou, aby si Billy mohl udělat přesnou představu. A hlavně aby mohl díky nešikovnosti Trolla spadnout do Díry.



Taky se vám určitě stává, že po vydatném obědě se vám samy zavírají oči. Zvláště silné je toto nutkání v okamžiku, kdy se vám snaží někdo vypovědět svůj velice dlouhý a zdánlivě nudný životní příběh. Není se čemu divit, že v okamžiku, kdy Billyho zasáhla Trollova paže, byl myšlenkami v říši snů a vůbec nečekal takovou podlou ránu do zad.

Úloha 6. (8 bodů): Pro Billyho však říše snů znamená říši matematiky. Představoval si čtverec, který je dvěma přímkami rozdělen na čtyři části. Obě tyto přímky prochází jeho středem a svírají spolu úhel 75°. Také je vidět, že jedna přímka rozděluje strany čtverce, kterými prochází v poměru 1:2 (viz obrázek). Spočítejte obsah dvou vyšrafovaných protilehlých částí čtverce, jestliže strana tohoto čtverce má 6 cm.

Před dlouhým pádem Billy sice na okamžik stihl otevřít oči, ale ty jej jen ujistily, že proti gravitaci bude zase jednou krátký. Zlehka v panice vykroužil rukama ve vzduchu zmenšující se elipsičky a mohl oči zase spokojeně zavřít, protože ve tmě, do které se neodvratně řítil, mu byly stejně k ničemu.

Byl to poněkud zvláštní zážitek. Čekal, že se mu bude zvedat žaludek, motat hlava a dokončení jeho cesty bude náležitě tvrdé. Nic z toho se však nestalo. Jako by visel ve vzduchu a čekal, až se ráčí dostavit nějaký Prostor, příležitostně i Čas. Poslední, na co se mu podařilo před nedobrovolným výletem pomyslet, byla žvýkačka. Byl zvyklý si ji vždycky dávat po jídle, snad jako dezert, snad kvůli pevné víře v její čistící účinky. První, kdo se dostavil dělat Billymu společnost, byla Vůně. Byla těžko specifikovatelná, ale jakmile jste ji ucítili, bylo vám jasné, že se v příštích minutách musí objevit něco růžového a sladkého. Ano i Růžová a Sladká se dostavily spolu s párem Stolků, prodejním Pultem a Strojem na zmrzlinu. Nebudeme pátrat jak, a už vůbec se nebudeme pídit po proč, ale Billy byl ve své oblíbené cukrárně.

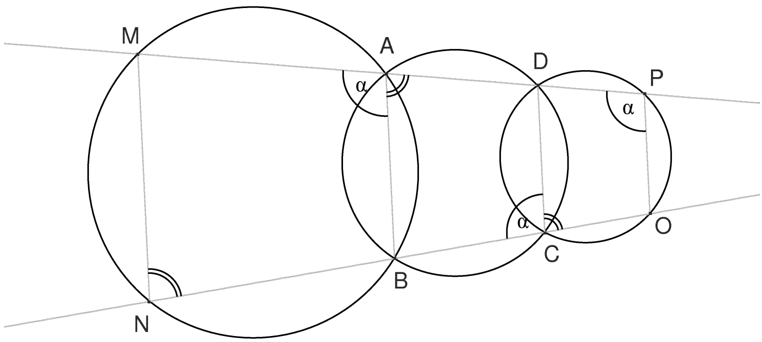
*Řešení úloh 4. série posílejte do **4.4.2011** na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 11 Bílovec

Autorská řešení 3. série

Úloha 1.

V tětivovém čtyřúhelníku (tedy v takovém, že mu lze opsat kružnici) platí, že součet úhlů u protilehlých vrcholů je 180°. Pokud si tedy úhel DPO označíme jako α, pak jasně vidíme, že úhel DCO má velikost $180° - \alpha$. Protože úhel BCD je doplňkový k úhlu DCO, má velikost α. Jelikož čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, má úhel BAD velikost $180° - \alpha$. Ovšem BAM je opět doplňkovým úhlem k tomuto úhlu a má velikost α. Protože čtyřúhelník $ABMN$ je také tětivový má úhel BNM velikost $180° - \alpha$. Protože součet úhlů u protilehlých vrcholů v čtyřúhelníku $OPMN$ je 180°, je tento čtyřúhelník tětivový. Lze mu tedy opsat kružnici. Body O, P, M, N tedy leží na jedné kružnici.



Bára

Úloha 2.

Máme celkem pět kaktusů:

Žlutý	100 g	cena za kus $100 \cdot 5 = 500$ Kč
Zelený	150 g	cena za kus $150 \cdot 2 = 300$ Kč
Modrý	$250 : 2 = 125$ g	cena za kus $125 \cdot 3 = 375$ Kč
Fialový V	$2 \cdot 100 = 200$g	cena za kus $200 \cdot 15 = 3\,000$ Kč
Fialový M	$350 : 2 = 175$ g	cena za kus $125 \cdot 15 = 2\,625$ Kč

stánek U Cesty:

50 modrých	$50 \cdot 375 = 18\ 750$ Kč
13 zelených	$13 \cdot 300 = 3\ 900$ Kč
celkem: 22 650 Kč	

stánek Strmý:

10 žlutých	$10 \cdot 500 = 5\ 000$ Kč
2 fialové V	$2 \cdot 3000 = 6\ 000$ Kč
5 fialových M	$5 \cdot 1875 = 13\ 125$ Kč
celkem: 24 125 Kč	

Stánek U Cesty by musel utržit ještě 1 475Kč. Chce prodat co nejméně kaktusů, proto bude prodávat ty nejdražší, které má – modré.

Jeden modrý kaktus stojí 375Kč, jich prodat ještě $1475 : 375 = 3{,}93 \rightarrow 4$ kusy.

Katka

Úloha 3.

Nejprve vypočítáme obsah stolečku $S = \frac{10^2}{2} = 50cm^2$. Hledaný trojúhelník má mít obsah 2 cm^2, a proto rozdělíme plochu stolu na 25 trojúhelníků o obsahu 2 cm^2. Pokud do těchto trojúhelníků rozmístíme všech 25 puntíků tak, aby v jednom trojúhelníku nebyly více než dva puntíky jedné barvy a zároveň ani dva a více puntíků různých barev, dokážeme, že hledaný trojúhelník neexistuje. V opačném případě dokážeme jeho existenci. Vezmeme tedy 5 žlutých puntíků a rozmístíme je tak, aby v jednom trojúhelníku nebyly více než dva a zároveň zabraly co nejméně místa. Rozmístění tedy bude 2, 2 a 1 puntík, celkem ve 3 trojúhelnících. Obdobně pro 15 zelených puntíků (7×2 a 1, celkem 8 trojúhelníků) a 25 modrých puntíků (12×2 a 1, celkem 13 trojúhelníků). Nyní nám zbývá pouze jeden prázdný trojúhelník, ale ještě 5 červených puntíků. Pokud je všechny umístíme do něj, bude splňovat podmínku, že obsahuje alespoň 3 puntíky jedné barvy. Pokud tam umístíme pouze část z nich, zbytek musíme přidat do již obsazených trojúhelníků. Ty tak budou splňovat podmínku, že obsahují alespoň 2 puntíky různých barev.

Bára

Úloha 4.

Nejdříve vypočtu obsah čtverce. Udělám to nejjednodušeji, jak to jde. Použiji vzorec pro výpočet obsahu čtverce: $S = \frac{u^2}{2}$. Úhlopříčka u je však dvojnásobkem poloměru dané kružnice $r = 4\ cm$. Dosadíme: $S = \frac{(2 \cdot 4)^2}{2} \rightarrow S\ = 32\ cm^2$.

Dále vypočtu obsah trojúhelníku. K tomu potřebuji znát délku jeho výšky a délku jeho strany. Víme, že v rovnostranném trojúhelníku splývají výšky s těžnicemi. Stejně tak splývá střed kružnice opsané s těžištěm. Jestliže těžiště dělí těžnici v poměru 2:1, pak i střed kružnice opsané dělí v našem případě výšku v tom samém poměru. Délka výšky je tedy 6 cm. Délku strany sice rovnou spočítat nemůžeme, ale můžeme zjistit její polovinu pomocí Pythagorovy věty z trojúhelníku SAC_0, kde S je střed kružnice opsané, A je vrchol trojúhelníku a C_0 je koncový bod výšky a zároveň není vrcholem daného trojúhelníku. Polovina strany je tedy: $\sqrt{16-4} = \sqrt{12}$. Strana je tedy $2\sqrt{12}$ cm. Nyní můžeme dosazovat. $S_1 = \frac{6 \cdot 2\sqrt{12}}{2} = 6\sqrt{12}$. Poměr je tedy $\frac{3\sqrt{12}}{16}$. To můžeme částečně odmocnit na tvar $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Vasil

Úloha 5.

x	celková ukradená částka
$\frac{x}{12}$	částka, kterou by dostal lupič, kdyby se nemuseli dělit a danit
$\frac{0{,}85x}{15}$	částka, která zbyla každému z patnácti lidí po zdanění
480 Kč	rozdíl obou částek

Nyní vyřešíme rovnici:

$$\frac{x}{12} = \frac{0,85x}{15} + 480$$
$$x = 18000$$

Celkově bylo ukradeno 18 000 Kč.

Michal

Úloha 6.

Pokud jste si pořádně přečetli Piroh z 2. série, nemohli jste mít s řešením této úlohy žádný problém. V tomto případě je invariantem součet všech čísel na tabuli, což je 5050. Jestliže na tabuli zbylo pět po sobě jdoucích čísel, můžeme si je označit takto: $a-2, a-1, a, a+1, a+2$. Součet těchto čísel se musí rovnat 5050, tedy:

$$\begin{aligned}(a-2)+(a-1)+a+(a+1)+(a+2) &= 5050\\ 5\cdot a &= 5050\\ a &= 1010\end{aligned}$$

Na tabuli tedy zbyla čísla 1008, 1009, 1010, 1011, 1012.

Pája

Zakousni se! $\pi\rho H$ POZNÁNÍ

Teorie grafů

V tomto Pirohu jsem se rozhodl lehce naťuknout Teorii grafů. Úlohy tohoto matematického oboru se příliš nevyskytují ani v olympiádách, ani v našem semináři, ale i přesto je dobré se s teorií grafů seznámit. Je to ovšem obor poměrně dost rozsáhlý a dodnes ne zcela probádaný. Já zde uvedu pouze dvě základní úlohy, pomocí kterých si vysvětlíme několik základních principů z teorie grafů, a které Vás možná podnítí k jejich podrobnějšímu studiu. Přinejmenším uvidíte, čím se teorie grafů zabývá. Koho by tato tématika zaujala, doporučuji knihu Úvod do teorie grafů od Jiřího Sedláčka nebo přijet na naši víkendovku (viz strana 1), kde o ní určitě uslyšíte nějakou přednášku.

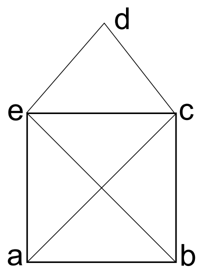
Pro začátek objasním, co je myšleno pod pojmem graf. Graf se skládá z bodů (uzlů) a spojnic mezi nimi (hran). V reálu je grafem například silniční mapa. Města na mapě jsou uzly grafu a cesty, které spojují tato města, jsou jeho hrany. Budeme se zde zabývat pouze grafy, jejichž každé dva uzly jsou spojeny maximálně jednou hranou a kde každá hrana je ohraničena dvěma uzly.

Když víme, co je to graf, můžeme si uvést první příklad. Každý ho určitě znáte.

Úloha 1: Mějme graf o pěti uzlech a, b, c, d, e, který je zobrazen na obrázku č. 1. Sestrojte tento graf jedním tahem.

Řešení:

Jedním tahem je myšleno to, že musím sestrojit hrany tohoto grafu tak, aby při sestrojování každá nově sestrojená hrana navazovala na tu předchozí a zároveň, aby žádná hrana nebyla sestrojena dvakrát. Jednoduše řečeno, když tento graf budeme kreslit tužkou na papíře, nesmíme během kreslení zvednout tužku z papíru a nesmíme tužkou přejet přes žádnou již hotovou hranu. Zřejmě každý dokáže zadaný graf sestrojit jedním tahem. Otázkou ale je, proč a hlavně, které jiné grafy dokážeme také sestrojit jedním tahem!



Obrázek č. 1

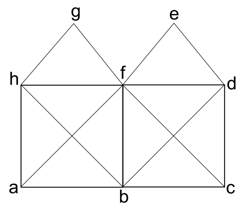
Pro odpověď si musíme vysvětlit ještě jeden pojem. Tím je *stupeň uzlu.* Z každého uzlu v grafu můžeme vést libovolný počet hran. Na obrázku č. 1 vidíme, že z uzlu d jsou vedeny 2 hrany, z uzlů a a b 3 hrany a z uzlů c a e 4 hrany. Počet hran, které vychází z jednoho uzlu, označujeme *stupněm uzlu.* Tak například uzly a, b, c, d, e mají popořadě stupně uzlu 3, 3, 4, 2, 4. A právě určení stupně uzlu je klíčové pro vyřešení příkladu. Protože platí věta: Graf G lze sestrojit jedním tahem právě tehdy, má-li právě

2 uzly lichého stupně. Dále musí tento graf být souvislý – neskládá se z více částí, které spolu nejsou vzájemně propojeny hranami.

Ještě bych měl dodat, že graf, který obsahuje pouze uzly sudého stupně lze také sestrojit jedním tahem. Ale to není případ grafu z našeho příkladu.

Na obrázku č. 1 vidíme, že graf obsahuje právě dva uzly lichého stupně (uzly a a b – stupně uzlů jsou 3), a proto ho lze sestrojit jedním tahem. Tento tah musí začínat v jednom uzlu lichého stupně a končit v druhém uzlu lichého stupně.

Na obrázku č. 2 je graf, který už jedním tahem sestrojit nelze. Má totiž 4 liché uzly (a, b, c, f), a proto nevyhovuje předchozí větě.



Obrázek č. 2

Tak to jsme naťukli problematiku kreslení jedním tahem. Jen tak pro zmínku – grafy, které lze sestrojit jedním tahem, se nazývají Eulerovské grafy (L. Euler byl významný matematik, zabývající se mnohými obory matematiky, z nichž jedním je také teorie grafů).

Uveďme si další příklad, pomocí kterého si opět představíme jiné odvětví teorie grafů.

Úloha 2: Mějme mapu Evropy, znázorňující evropské státy a jejich hranice. Obarvěte každý stát určitou barvou tak, aby žádné dva sousední státy nebyly obarveny stejnou barvou a abyste použili co nejmenší počet barev.

Řešení:

Tuto úlohu lze převést do teorie grafů. Představme si, že každý stát znázorňuje jeden uzel. Jestliže spolu dva státy sousedí, tak uzly, které představují tyto státy, spojíme hranou. V takto vzniklém grafu potom obarvujeme uzly, přičemž musí platit, že žádné dva uzly, které jsou spojeny hranou, nesmí být obarveny stejnou barvou. Řešení si můžete sami vyzkoušet – vezměte mapu Evropy a obarvujte její státy. Po nějaké době snažení určitě přijdete na to, že Vám na tento úkol stačí pouze 4 barvy. To je také správná odpověď na náš příklad.

Zajímavostí je, že čtyři barvy nám stačí k obarvení libovolné mapy. I když si nakreslíte vlastní mapu, jakkoliv záludnou, stejně ji vždy dokážete obarvit čtyřmi barvami. Tato skutečnost trápila matematiky dlouhá léta, jelikož se jim nedařilo nalézt matematicky důkaz, který by ji potvrdil. Až roku 1976 se americkým matematikům podařilo tento důkaz provést, čímž se hypotéza stala pravdou.

Tím tento Piroh končí. Doufám, že Vás přiměl aspoň k malému zamyšlení a rozšířil Váš matematický rozhled.

Jiřík

Výsledkové listiny

Tady najdete jen několik nejlepších řešitelů, pro úplné výsledkové listiny se podívejte na naše internetové stránky.

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
0.	Ideální	KoKoS	7	5	9	6	5	8	40	Hafo
1.	Berenika	Čermáková	-	5	-	-	-	-	5	25

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
0.	Ideální	KoKoS	7	5	9	6	5	8	40	Hafo
1.	Aleš	Krčil	7	5	9	6	5	8	40	114
2.	Alžběta	Maleňáková	7	5	5	6	5	8	36	108
3.	Jan	Havelka	7	5	0	6	5	8	31	93
4.	Pavel	Turek	5	5	-	6	5	8	29	81
5.	Eliška	Červenková	-	5	0	6	5	8	24	71
6.	Jiří	Gbelec	-	5	-	-	5	-	10	29
7.	Pavel	Vondráček	-	-	-	-	-	-	0	24
8.	Anastázie	Chalupová	0	2	-	1	0	-	3	7

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
0.	Ideální	KoKoS	7	5	9	6	5	8	40	Hafo
1.	Anna	Kufová	7	5	9	6	5	8	40	120
2.	Marek	Janka	7	5	3	4	5	8	32	97
3.	Daniel	Pišťák	7	5	9	4	5	8	38	88
4.	Anna	Červenková	-	5	0	6	5	8	24	71
5.	David	Gráf	-	-	-	-	-	-	0	53
6.	Patrik	Šindler	5	5	-	5	0	8	23	51
7.	Ondřej	Pavelka	-	-	-	-	-	-	0	42
8.	Veronika	Hánová	-	5	-	4	0	-	9	35
9.	Veronika	Hájková	-	-	-	-	-	-	0	34
10.	Jana	Gebauerová	-	-	-	-	-	-	0	33

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
11.	Vít	Grosser	-	-	-	-	-	-	0	32
12.	Eliška	Pfaurová	-	5	-	-	-	-	5	31
13.	Jakub	Novák	-	-	-	-	-	-	0	30
14.-15.	Zuzana	Beigerová	-	-	-	-	-	-	0	22
	Lukáš	Klocek	-	-	-	-	-	-	0	22
16.	Jindřich	Brož	0	4	0	0	0	8	12	17
17.-19.	Jakub	Brož	0	4	0	0	0	8	12	15
	Lukáš	Frankl	-	-	-	-	-	-	0	15
	Kateřina	Grygarová	-	-	-	-	-	-	0	15

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
0.	Ideální	KoKoS	7	5	9	6	5	8	40	Hafo
1.-2.	Václav	Rozhoň	5	5	8	6	5	8	37	110
	Szymon	Wantuła	7	3	9	6	5	8	38	110
3.	Ondřej	Darmovzal	7	-	9	-	-	8	24	101
4.	Martin	Vančura	5	5	0	6	5	8	29	98
5.	Jan	Skořepa	5	3	9	6	5	8	36	96
6.	Jan	Marek	7	5	9	6	5	8	40	92
7.	Michael	Matějka	7	3	6	5	5	8	34	91
8.	Matěj	Dirr	-	3	1	6	5	8	23	80
9.	Tomáš	Müller	7	3	1	5	5	8	29	76
10.-11.	Jan	Erhart	7	5	9	6	5	8	40	74
	Diana	Hachová	1	5	9	4	5	8	32	74
12.	Eva	Harlenderová	7	5	-	5	5	8	30	65
13.	Radim	Bárta	0	5	0	5	5	8	23	59
14.	Vojtěch	Kovář	-	5	0	6	5	-	16	34
15.	Štěpánka	Dobalová	-	-	-	-	-	-	0	24
16.	Petra	Pavelková	-	-	-	-	-	-	0	17
17.	Pavel	Kubíska	-	-	-	-	-	-	0	15
18.-19.	Jan	Jež	-	-	-	-	-	-	0	14
	Kristýna	Krupičková	4	-	-	-	0	-	4	14
20.	Veronika	Synková	-	-	-	-	-	-	0	13
21.	Pavel	Špíšek	-	5	-	6	-	-	11	11

Milý řešiteli,

chtěl by sis vyzkoušet, jak chutná vysokoškolský život? Přijeď **1.–3. dubna** do Bílovce! Naše gymnázium se zde na jeden víkend změní na univerzitu. Poznej, co je to studijní oddělení a zkouškové období. Zažij na vlastní kůži promoci!

Na naší univerzitě se dozvíš spoustu zajímavostí z oblasti přírodních věd i odjinud. Potkáš lidi, kteří sdílí stejné zájmy. Akce je určena převážně pro středoškoláky, ale na své si jistě přijdou i přírodovědně nadaní žáci základních škol a nižších gymnázií (například ty jako řešitel Kokosu).

Více informací najdeš na internetových stránkách **univerzita.gmk.cz**, kde můžeš podat svou přihlášku.