



KOKOS

31.ročník

★

5.leták

Milý řešiteli, jelikož už máme čtvrtou sérii za sebou, je na čase se s nadšením pustit do další, a to páté série! Plíživými kroky se otepluje a brzy již uděří krásné počasí. Je před tebou spousta slunečných dnů strávených venku s kamarády. Ale my víme, že si i tak najdeš cestu k řešení KoKoSu. Přejeme hodně zábavy s úlohami a už teď se těšíme na Tvá řešení. Krásné Velikonoce!

Zadání úloh

Celá škola se otráasala v základech. Holubi z půdy splašeně kroužili okolo budovy a hlasitě naříkali. Studenti, kteří zůstávali ve škole déle vyděšeně prchali ze strachu, že se brzo zřítí. Hluboko pod základy se zuřivě smála kniha vázaná v černé kůži.

Jirka seděl na podlaze u zdi zenové zahrádky a kryl si rukama obličej před štěrkem, který létal po celé místnosti v neřízeném víru. Chtěl utéct, ale nemohl se zvednout, aniž by nebyl znovu sražen k zemi a východ byl stejně moc daleko. Najednou ho však za rameno popadla cizí ruka a zatáhla ho směrem do zdi. Místo toho, aby se narazil, lehce přepadl dozadu a dopadl na zadek v jiné podzemní chodbě.

Nad ním se skláněla Magda a tahala ho na nohy.

„Cos to sakra proved?“ zařvala na něj přes přes ohlušující řev třesoucí se země.

„Já nevím, to ta kniha.“

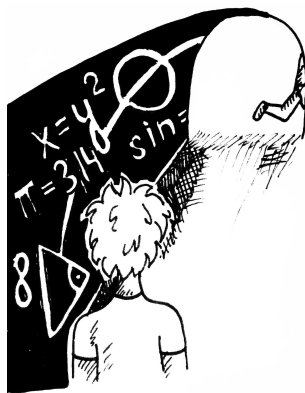
„Jaká kniha sakra?“

„Matematikon.“ Jakmile to slovo vyslovil, změnil se Magdin výraz v čiré zděšení. Chytila Jirku za ruku a protáhla ho další zdi.

„Tak tohle je pořádně v háji,“ mrmlala si pro sebe.

„Musíme najít Maxe.“

Postupně prošli sítí tunelů, které Jirka ještě nikdy neviděl. Některé lemovaly police knih všech velikostí a ve všech jazycích. Jiné měly zdi popsané a pokreslené nejrůznějšími rovnicemi a geometrickými důkazy. Další Jirka nedokázal ani popsat. Nakonec došli ke stěně, která na sobě nesla řadu čísel.



Úloha 1. (9 bodů): Na stěně je v řadě za sebou napsáno 42 **různých** přirozených čísel. Ukažte, že z čísel řady lze vybrat několik (alespoň jedno) tak, aby jejich součet byl dělitelný 42.

Magda se několika čísel dotkla, z kapsy vytáhla křídou a rychle na zeď načmáral pár rovnic. Stěna se pomalu zasunula do země a Jirka následoval Magdu do stísněné místnosti s malou poličkou a krbem, ve kterém plápolal modrý oheň.

Na poličce ležela osamělá kniha, kterou Magda sebrala a chvíli v ní listovala. Zastavila se na stránce, kterou okamžitě vytrhla, hbitě složila do tvaru origami jeřába a hodila do ohně. Začala knihou listovat znova, ale vzápětí se z jedné ze zdí vynořil Max.

„Co se to tady u všech čertů děje?“

„Holá katastrofa, Jirka hodil do Vortexu Matematikon.“

„Cože?“ rozkřikl se Max a obrátil se na Jirku. „Jak ses k němu dostal?“

„Byl n-na půdě,“ vykoktal překvapeně Jirka.

„Magdi, zavolej ostatní!“

„Už na tom pracuju,“ řekla Magda a poskládala dalšího jeřába, který také skončil v plamenech.

„A ty mi ukaž kdes tu kniha sebral.“ Max popadl Jirku a ruku, oba se propadli do země a objevili se přímo před dveřmi na půdu.

„Neměli bychom raději utéct? Co když gympl za chvíli spadne?“ zeptal se vyděšeně Jirka.

„Tahle budova má už hodně za sebou a zatím se nikdy nezřítíla. Pochybuji, že se to stane dneska. Rychle, ukaž mi kde a jak jsi ten Matematikon našel.“



Jirka otevřel dveře na půdu a vedl Maxe po schodech nahoru. Došli přímo do velké podkrovní místnosti, kde stál podstavec s okovy, které ještě nedávno držely starou knihu připoutanou.

„Přímě tady ležel. Stačilo jen vyřešit nějaké hloupé příklady a mohl jsem ho odnést.“

„Hlupáku, nenapadlo tě, že je ta kniha přikovaná z nějakého důvodu?“

„Když já jsem neměl jinou možnost.“

Max si odfrkl a nedbaje otřesů přešel k podstavci, načež ho začal zkoumat. Zrovna měl v ruce jeden z okovů, když se z podlahy vynořil jiný pestře oděný kluk. Byl skoro o dvě hlavy menší než Max, s vlnitými černými vlasy.

„Maxi, musíme rychle vypadnout.“

„Tome? Co to meleš? Všechno by mělo ještě držet.“

„Nevím, co jste tam dole vyvedli, ale je to horší než cokoli, s čím se při stavbě počítalo. Nejlepší bude vypadnout ven a vymyslet, co dál.“

Tom zmizel a Max chytil Jirku za rameno. V okamžiku stáli mezi Magdou a Tomem před školou. Magda cosi rychle čmárala na kus papíru.

Musíme školu izolovat od okolí, říkala. Jakmile dokreslila, roztrhala papír na čtyři kusy a každému jeden dala spolu s kusem křídý.

„Maxi, k internátu. Tome, ke knihovně. Jirko, na hřiště. Já zůstanu tady před vchodem.“

„Co s tím mám dělat?“ civěl Jirka hloupe na kus papíru.

„Jsi matematik, na to přijdeš. Bež, dělej!“

„Tak se Jirka rozběhl a hřiště. Uprostřed se zastavil a podíval se na náčrt.“

Úloha 2. (6 bodů): Je dáno 5 trojúhelníků. $\triangle ABC$ je shodný s $\triangle DEF$, zatímco $\triangle GHI$ je shodný s $\triangle JKL$. Víme, že obsah $\triangle MNO$ je roven 14 cm^2 a že součet obsahů všech pěti trojúhelníků je o 7 cm^2 větší, než kdyby byly všechny trojúhelníky shodné s $\triangle ABC$, ale zároveň je o 3 cm^2 menší, než kdyby byly všechny shodné s $\triangle GHI$. Kolik cm má strana $\triangle DEF$, jestliže k ní příslušná výška je rovna jejím $2/11$?

Naštěstí se Jirka během minuty vzpamatoval, obrázek rozluštil a dal se do kreslení. Jakmile udělal poslední čáru, začaly čáry matně svítit. Budova školy se najednou zdeformovala, jako by se na ni díval skrz podivnou čočku, a nabyla nezdravé barvy.

Zpátky u vchodu do školy dřepěla Magda nad vlastním křídovým náčrtem. Země se mezitím přestala třást a všechno se trochu uklidnilo. Pomalu se blížili i Tom a Max. Od hlavní cesty šli další pestře odění lidé různého věku, v některých Jirka poznal bývalé studenty gymnázia. Ze stran zase přicházely zástupy bílé a černé oděných žáků. Všichni se zastavovali před budovou a bázně na ni hleděli, brzy začalo hlasité davové šušání.

Magda vstala a obrátila se k davu. „Ticho prosím!“ Dav okamžitě utichl. „Jak vidíte, máme tady docela vážný problém. Je mi jedno, jestli jste černí, bílí nebo barevní. Teď budeme muset pracovat spolu.“

„Všichni nejspíš víte, že pod školou se nachází matematický vortex, který všichni využíváme. Bohužel jsme my, ochránci tohoto místa, selhali a přímo do jeho srdce se dostal Matematikon.“ Jakmile vyslovila jméno knihy, ozvalo se se šušání znova. Několik dívek omdlelo. „Ano, ano, je to tak. Teď se všichni uklidněte a rozmístěte se kolem školy,

za chvíli se začnou dít zajímavé věci.“

Bez odmlouvání se všichni začali stavět na své pozice. Jirka chtěl jít taky, ale Magda se mu postavila do cesty a vrazila mu před nos další papírek. „Nejradši bych ti jednu vrazila, ale zrovna teď jsi asi nejlepší matematik, kterého mám. Tohle běž narýsovat na hlavní vchod. Potom si promluvíme.“ Jirka se ani neodvážil nic říct šel rovnou ke vchodu.

Úloha 3. (7 bodů): Máme trojúhelník ABC . Označme středy stran S_a, S_b, S_c . Víme, že obsah trojúhelníku $S_a S_b S_c$ je 12 cm^2 . Označme T těžiště trojúhelníku ABC . Vypočítejte obsahy jednotlivých trojúhelníků $AS_c T, BS_a T$ a $CS_b T$.

Jakmile se však Jirka dotknul křídou dveří, otevřely se, cosi ho vtáhlo dovnitř a ozvalo se za ním prasknutí, jak se obě křídla znova zavřely. Škola byla opuštěná a tady uvnitř se stále třásla. Ze stropu padala omítka, skla oken postupně vypadávala a stěny začínaly praskat.

Nebylo kudy utéct, hlavní vchodové dveře zmizely. Schody se začaly Jirkovi kroutit před očima. Jedny vedly nahoru, jen aby se vzápětí otočily o devadesát stupňů a vedly podél stěny. Všechno se začalo deformovat do nejrůznějších nepravděpodobných tvarů a velikostí.

„To sis myslel, že mi tak snadno utečeš?“ uslyšel najednou Jirka. „Nejraději bych ti zakroutil krkem, žes zkusil zdrhnout, ale nemám ruce. HA!“ Ozvěna se se chodbami odrážela ještě dobrou minutu. A podlaha pod Jirkou se propadla.

V zenové zahrádce stále víril štěr, ale celá jeskyně teď byla alespoň desetkrát větší. Létaající kamínky narážely do stěn a užíraly ze stěn víc a víc skály, zanedlouho by se určitě dostaly až k základům školy. Matematikon se vznášel uprostřed toho chaosu a celým prostorem se rozléhal strašlivý smích.

„Co to děláš,“ zvolal Jirka?

„Pestavuji! Všechno je tady nedokonalé, nepřesné. S energií na tomhle místě můžu přetvořit celý svět do dokonalé matematické podoby!“

„Ale vždyť ničíš všechno okolo sebe!“

„Někdy je lepší zničit nepovedené projekty, aby na jejich místě mohly vyrůst nové a lepší!“

Ze všech stran na Jirku začaly létat úlomky skalní stěny a musel využít všechny matematické triky, které znal, aby se vyhnul. Najednou u jedné ze stěn zahlédl někoho jiného. Byl to Tom, ten černovlasý matematik a něco se snažil Jirkovi naznačit. *Zabav ho*, artikuloval tiše.

„Hej, poslouchej mě chvíli, chci si zahrát hru!“ zařval Jirka na Matematikon.

„Hahahá, proč bych s tebou hrál hry! Za chvíli bude vše k ničemu!“

„Ale já se chci o tebe naučit co nejvíc, než bude pozdě!“ Všechno se na chvíli uklidnilo a strašlivý řev trhané skály na chvíli ustal.

„Hmm, nakové nadšená po vědění se musí ocenit,“ prohlásila kniha zadumaně. „Budiž, jakou si chceš zahrát hru?“



„Matematické hádanky, ty mám rád!“

„Dobrá volba! Tak poslouchej.“

Úloha 4. (8 bodů): Matematikoni si myslí osmimístné číslo a Jirka se ho snaží uhádnout. Matematikoni řekne, že poslední dvojčíslí je rovno 21, a platí, že celé hádané číslo je dělitelné třemi a libovolné tři číslice z prvního šestičíslí uspořádané do libovolného trojmístného čísla jsou dělitelné šesti. Jirka si stěžuje, že to nestačí, že existuje více takových čísel. Matematikoni se nad ním slituje a napoví, že první šestičíslí obsahuje alespoň jednu prvočíselnou číslici a že dvě stejné číslice spolu nikdy nesousedí. Jaké číslo si Matematikoni myslí?

Jirka musel ještě chvíli nad problémem dumat a dalších pár minut jenom předstíral, že nezná odpověď, aby získal více času pro Toma. Ten mezitím rychle čmáral křídou na podlahu podivné symboly a obrazce. Nakonec Jirka odpověděl.

„Výborně, výborně! Škoda takového matematika.“

„Teď budeš hádat ty.“ Matematikoni se začal hluboce smát.

„Zkus mě dostat, ale nemáš šanci, smrtelníku!“

Jirka se zamyslel a pronesl hádanku.

Úloha 5. (5 bodů): Matematické soutěže se zúčastnilo 128 žáků. Ne každý však odevzdal třetí úlohu. Když nakonec autor soutěže zpracovával statistiku, zapsal si, že odevzdané třetí úlohy ohodnotil průměrně 3,1 bodu (zaokrouhleno na desetiny) a každý soutěžící dostal za třetí úlohu průměrně 2,4 bodu (zaokrouhleno na desetiny). Kolik žáků mohlo odevzdat třetí úlohu? Uděloval se pouze celý počet bodů, za neodevzdanou úlohu bylo 0 bodů.

Dal si co nejvíce na čas, protože věděl, že Matematikoni ji vyřeší okamžitě, a chtěl nahnat co nejvíce času. Nemínil se, sotva dopověděl, kniha už odpovídala: „Ha, učíš se dobře, ale nemá cenu se snažit. Teď ti dám poslední hádanku a pak budeš muset jít.“

Úloha 6. (6 bodů): Max a Tom neví, kdy má mít Hanka letos oslavu narozenin. Hanka se jim to rozhodla říct hádankou. Vypsala jim různá data a řekla, že jedno z nich je to správné.

17. února 2019

21. března 2019

18. března 2019

31. března 2019

24. února 2019

27. dubna 2019

29. února 2019

25. dubna 2019

14. dubna 2019

22. března 2019

Poté dodala, že datum je vyšší než 20. a nižší než 30. a prozradila jim správný

měsíc. V tuto chvíli už to bystrému Tomovi došlo. Kdy má Hanka oslavu?

Jirka hned věděl, jaká je odpověď, ale natahoval svou odpověď dokud to šlo. „Tak složitě to není, no tak!“ stěžoval si matematikon. A pak Tom máchl za knihou rukou a vrhl se po ní. Jirka ho následoval, načež společně Matematikon zavřeli a stáhli k zemi.

Ozvalo se zapraskání, křídové čáry, které nakreslil Tom se prohnuly, napnuly, zazářily a pohltily černou knihu, která vydala strašlivé zaječení. Chvíli bylo ticho a pak se začalo okolí znova třást. Tom se podíval na Jirku a řekl: „Musíme zmizet.“

Ukončení v závěrečné sérii

Rocks fall everybody dies

Řešení úloh 5. série posílejte do 31.5.2019 na známou adresu:

KoKoS

Gymnázium Mikuláše Koperníka

17. listopadu 526

743 11 Bílovec

Autorská řešení 4. série

Úloha 1.

Úsečka $S_{CA}S_{BC}$ je střední příčkou o délce 2 cm.

Trojúhelník $S_{BC}CS_{CA}$ je podobný trojúhelníku ABC s poměrem podobnosti $1/2$. Výška na vrchol C v menším trojúhelníku měří 3 cm, stejně jako vzdálenost rovnoběžek $|S_{AC}S_{BC}AB| = 3\text{cm}$.

Těžnice v trojúhelníku se protínají v těžišti T za poměru délek rozdělených částí těžnic $1 : 2$, a to znamená, že $\triangle ATB \sim \triangle S_{BC}TS_{CA}(sss)$ s poměrem podobnosti $1/3$.

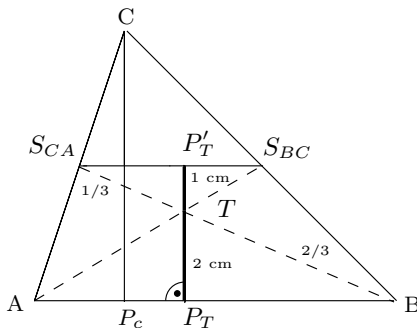
Uvažujme body P_T, P'_T patami kolmice z bodu T na rovnoběžky $S_{AC}S_{BC}, AB$. Potom platí: $|P'_T T| = 1\text{ cm}$, $|P_T T| = 2\text{ cm}$.

Podle vzorce pro obsah trojúhelníku:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a \quad (a \text{ je délka strany trojúhelníku, } v_a \text{ je výška na stranu } a)$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot |S_{CA}S_{BC}| \cdot |P'_T T|$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1 \quad [\text{cm}]$$



Kuba & Max

Úloha 2.

Známe obsah horního čtverce a taky menší části lichoběžníku.

Můžeme tedy spočítat stranu čtverce (ta je současně i kratší základna lichoběžníku).

$$S = a^2$$

$$6,76 = a^2$$

$$a = 2,6$$

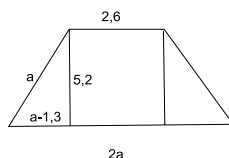
(Protože délka strany je kladné číslo, druhý kořen rovnice nemusíme uvažovat.)
Podle Vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku můžeme spočítat i výšku lichoběžníku - ta je stejná jako výška v menším trojúhelníku, na které je lichoběžník rozdělen.

$$S = \frac{av}{2}$$

$$v = \frac{2S}{a}$$

$$v = 5,2$$

Delší základnu lichoběžníku označím $2x$, potom jeho ramena mají délku x . Nyní můžu podle pythagorovy věty spočítat hodnotu x .



$$(x - 1,3)^2 + 5,2^2 = x^2$$

$$x^2 - 2,6x + 1,69 + 27,04 = x^2$$

$$2,6x = 28,73$$

$$x = 11,05$$

Když už známe všechny potřebné údaje v lichoběžníku můžeme spočítat jeho obsah.

$$S = \frac{(a + 2x) \cdot v}{2}$$

$$S = 64,22$$

A celá plocha střechy potom bude:

$$4 \cdot 64,22 + 6,76 = 263,64$$

Povrch střechy je $263,64m^2$

Zuzka

Úloha 3.

Rozdělíme si pole šachovnice do osmi skupin po osmi polích následujícím způsobem (pole ve stejné skupině mají stejná čísla).

1	2	3	4	5	6	7	8
8	1	2	3	4	5	6	7
7	8	1	2	3	4	5	6
6	7	8	1	2	3	4	5
5	6	7	8	1	2	3	4
4	5	6	7	8	1	2	3
3	4	5	6	7	8	1	2
2	3	4	5	6	7	8	1

A) Snadno nyní nahlédneme (šachovnici jsme totiž v podstatě rozdělili po úhlopříčkách), že věže stojící jen v jedné z osmi skupin se vzájemně neohrožují. Stačí proto ukázat, že alespoň jedna ze skupin obsahuje alespoň šest věží. K tomu použijeme Dirichletův princip. Celkově máme na šachovnici 42 věží, z nichž každá může být v jedné z osmi skupin. Jelikož $42 > (5 \cdot 8)$, vidíme z Dirichletova principu, že existuje skupina, která obsahuje šest věží, těchto šest věží se vzájemně neohrožuje a úloha je vyřešena.

B) My hledáme takový počet věží, kde tímto počtem zaplníme každou ze sedmi skupin třemi věžemi a poslední skupinu zaplníme věžemi čtyřmi. Proto minimální počet věží, takových aby se 4 neohrožovali je $3 \cdot 7 + 4 = 25$.

Kuba

Úloha 4.

Výraz $n^3 + 11n$ můžeme rozložit do podoby $n^3 - n + 12n = n(n+1)(n-1) + 12n$. Vidíme, že výraz $12n$ je vždy dělitelný 6.

Výraz $(n-1)n(n+1)$ je součin tří po sobě jdoucích čísel, proto musí být jedno z nich dělitelné 3 a jedno dělitelné 2.

Proto $(n-1)n(n+1)$ je dělitelné 6 a tudíž celý výraz $n^3 + 11n$ jakožto součet dvou výrazů dělitelných šesti je také dělitelný šesti.

Martička & Kuba & Ondra

Úloha 5.

Čísla od 1 do 2019 si rozdělíme na dvě hromádky. Jedná hromádka bude obsahovat sudé číslce, zatímco druhá číslce liché. Hromádka se sudými číslicemi obsahuje 1009 čísel a druhá hromádka 1010 lichých čísel. Nyní se podíváme jaké čísla nám budou vznikat po odčítání:

$$L - L = S(-2L + S), \quad S - S = S(-S), \quad L - S = L(-S)$$

Všimněme si, že po jedné úpravě se buď počet lichých čísel sníží o 2 a počet sudých zvýší o 1, nebo se počet sudých čísel sníží o 1.

Předpokládejme, že na tabuli vznikne číslo 1. To by ale znamenalo, že počet lichých čísel je jedna. Víme, že počet lichých čísel na začátku je sudý a v každém kroku tento počet snížíme o sudé číslo (buď o nebo o 2). Proto nám na konci vždy zbyde sudý počet lichých čísel, což je spor s původním předpokladem. Tím jsme dokázali, že na konci nemůže být na tabuli číslo 1.

P.S. Omlouváme se, za nedokonalosti v zadání úlohy.

P.S.S. Život je hořký. Bohu díky!

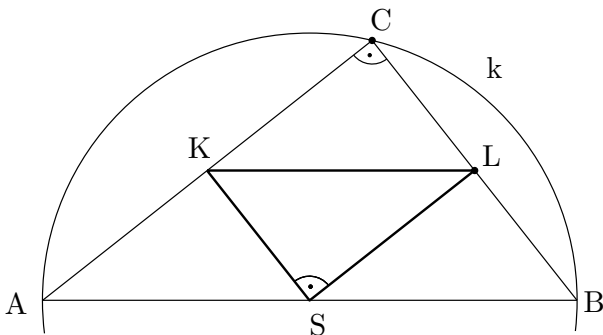
Kop

Úloha 6.

Kružnice k je Thaletova kružnice s průměrem AB . Úsečky KL , LS , SK jsou střední příčky v pravoúhlém trojúhelníku ABC , pro které platí, že mají poloviční délku odpovídající strany.

Trojúhelníky LKS , ABC jsou pak podobné (sss) a velikosti úhlů při odpovídajících si vrcholech jsou stejné ($|\angle ACB| = |\angle LSK|$).

Velikost úhlu $|\angle LSK| = 90^\circ$



Max

Úloha 6.

... KS , LS - střední příčky; $\triangle ABC$ - pravoúhlý ($|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$)

Další možné řešení je, že úsečka KS je kolmá na úsečku CB .

Úsečka LS je také kolmá na úsečku AC .

Každý čtyřúhelník svírá úhel o velikosti 360° . Jestliže máme již 3 úhly o velikosti 90° , bude i čtvrtý úhel takto velký, aby byl výsledek 360° .

Velikost úhlu je 90° .

řešitel – Vilém Bednařík

Výsledkové listiny

Tady najdete jen několik nejlepších řešitelů, pro úplné výsledkové listiny se podívejte na naše internetové stránky.

6. ročník

	<i>jméno</i>	<i>příjmení</i>	1	2	3	4	5	6	S	Σ
1.	Michal	Maděříč	-	-	-	-	-	-	0	18

7. ročník

	<i>jméno</i>	<i>příjmení</i>	1	2	3	4	5	6	S	Σ
1.	Milan	Holotňák	2	6	4	0	8	3	23	136
2.	Natálie	Vylamová	7	0	3	6	8	6	30	125
3.	Alžběta	Sedláčková	2	2	-	4	-	5	13	62
4.	Alexandra	Sedlová	-	-	-	-	7	6	13	45

8. ročník

	<i>jméno</i>	<i>příjmení</i>	1	2	3	4	5	6	S	Σ
1.	Vilém	Bednařík	8	6	5	6	2	6	33	144
2.	Monika	Štábová	6	6	7	6	-	6	31	140
3.	Jana	Dreiseitlová	-	6	0	-	8	6	20	117

	<i>jméno</i>	<i>příjmení</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>S</i>	Σ
4.	Lukáš	Pohořelský	2	1	2	-	8	0	13	109
5.	Radim	Jeřábek	9	0	0	-	2	3	14	86
6.	Adam	Jemelka	-	6	-	-	-	-	6	77
7.	Linda	Tomišová	-	-	-	-	-	-	0	64
8.	Jakub	Feichtinger	-	-	-	-	-	-	0	61
9.	Aneta	Formánková	-	-	-	-	-	-	0	53
10.	Karolína	Biolková	-	-	-	-	-	-	0	51
11.	Alexandra	Obracajová	2	1	-	-	-	-	3	24
12.	Jakub	Macíček	-	-	-	-	-	-	0	12

9. ročník

	<i>jméno</i>	<i>příjmení</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>S</i>	Σ
1.	Anna	Hronová	9	0	7	6	8	6	36	143
2.	Adam	Kutálek	9	6	4	-	8	5	32	134
3.	Lída	Kačenková	-	-	-	-	-	-	0	50