KOKOS

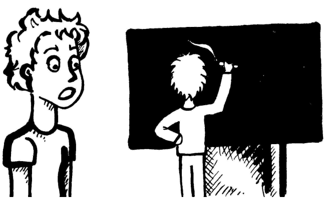
31.ročník ⋆ 3.leták

Milý řešiteli,
blíží se čas Vánoc a my Ti nadělujeme pod stromeček po perníčcích a kokosu vonící sérii. Na všech šest příkladů máš čas až do konce ledna. Dále můžeš v sérii jako obvykle najít autorská řešení, výsledkové listiny a jako bonus matematický Piroh. V letáku najdeš i pozvánku na naši exkluzivní Vánoční Víkendovku, která se uskuteční ve dnech 7. až 10. února. Přejeme Ti hodně kulišáckých nápadů při řešení úloh, veselé Vánoce a šťastný nový rok 2019!

Zadání úloh

Během prosince, když začínala zima, Jirka zjistil, že studium matematických tajů zahrnuje hodiny a hodiny meditace. Magda ho často nechala sedět ve své podzemní zenové zahrádce celé hodiny. Naštěstí se nezdálo, že by se čas strávený pod zemí nějak projevoval na povrchu. Všechny jeho pokusy o zjištění, jak něco takového může fungovat, odbyla Magda jednoduše. „Matika," řekla a poklepala si prstem na spánek.

Nijak zvlášť mu nevadilo, že mu nechce říct všechno hned, koneckonců jejich dohoda stála na důvěře a kdyby do ní začal příliš rýpat, nemusel by se dozvědět nic. Prozatím bohatě stačil její vliv na ostatní studenty, kteří se sice Jirkovi začali vyhýbat obloukem, ale nechávali ho na pokoji. Nikdo se na něj neopovážil ani promluvit. Tedy skoro nikdo.



Jednoho pátku, dva týdny před Vánoci, se Jirka zdržel po matematice ve třídě, chtěl si dopočítat jeden obzvláště složitý příklad. S nosem zabořeným v sešitě si vůbec nevšiml, že už všichni včetně učitele odešli. Najednou však jeho úhledné rovnice překryl cizí stín. Skláněl se nad tím výhružně Pepa.

„Tak ty si myslíš, že jsi teď nedotknutelný, jo?"

„Nech mě být, nic ti nedělám."

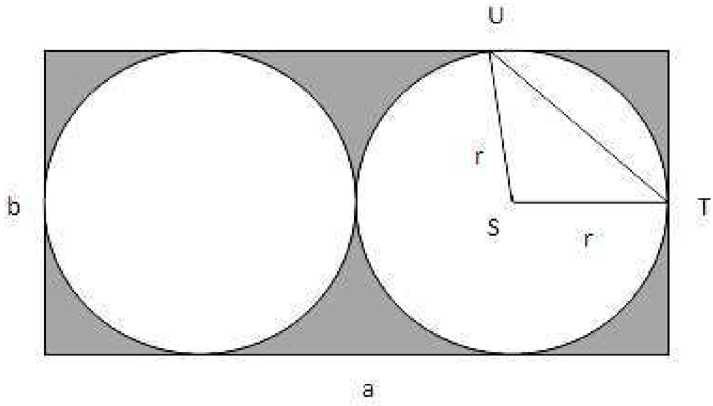
„Už nemůžu dál tolerovat tvou aroganci." Pepa se tvářil, jakoby šlo o otázku rytířské cti.

„Co to meleš?"

„Máš pocit, že tě ti hipíci ze sklepa ochrání? To jsi na omylu. Musíme ti trochu srazit hřebínek." S tím odkráčel k tabuli, vzal do ruky křídu a začal kreslit.

KoKoS, Gymnázium Mikuláše Koperníka, 17.listopadu 526, 743 11 Bílovec

Úloha 1. (7 bodů): Jaký je obsah šedé plochy na obrázku? Víme, že základna rovnoramenného trojúhelníku STU měří 6 cm a $|\sphericalangle UST|$ je roven $112°$.



Ne, už nebudu nic řešit pro ostatní. Jirka chtěl nasupeně odejít, ale když už byl u dveří, objevil se Pepa přímo před ním a zabouchl je. „Řešit budeš." Strčil do Jirky prstem a ten se v okamžiku objevil u tabule. Jak tohle sakra dělal? Nezbývalo nic jiného, než řešit. Nebyl to sice nejjednodušší problém, ale Jirka už jich řešil tolik, že přesně věděl co dělat.

Pepa jen nevěřícně zíral, když se pod jeho náčrtem během minuty objevil výsledek podtržený dvojtou čarou. „Vypadáš, jako bys v životě neviděl vyřešenou geometrickou úlohu," ušklíbl se Jirka.

„Vypadni," utrousil Pepa koutkem pusy, ale ani se na Jirku nepodíval. Dveře od třídy se samy od sebe s třesknutím rozrazily. Bylo jasné, že zdržovat se uvnitř by nemuselo dopadnout dobře.

* * *

Po škole sešel Jirka jedním z tajných schodišť, o kterých věděl, do podzemí. Čekalo tam překvapení. Místo Magdy seděl uprostřed místnosti nějaký cizinec. Oblečení měl stejné jako Magda, ale tvářil se podstatně jinak. Se skříženýma nohama a rovnými zády vypadal mnohem vážněji, Magda vždy seděla uvolněně s náznakem úšklebku na tváři.

„Už tady na tebe chvíli čekám," řekl, když Jirka vešel.

„A ty jsi kdo?"

Cizinec otevřel oči. „Ten tón si vyprošuju. Ale když už se ptáš, říkají mi Max. Jsem tady, protože si musíme promluvit o další části tvého výcviku."

„Kde je Magda?" zeptal se podezřívavě Jirka.

„Všude a nikde, s ní člověk nikdy neví. Neboj se a pojď sem." Max mu pokynul rukou, ale něž Jirka stihl sám udělat jediný krok, kamínky pod jeho nohama se začaly hýbat a přesunuly ho přes celou zahrádku.

„Jsem si jistý,“ začal povídat Max, „že tě zajímá, jak lidé okolo tebe provádí všechny tyhle triky.“ Jirka jenom přikývl. „Není náhoda, že tě učíme řešit matematické úlohy. Všechny ty podivnosti, co jsi zatím viděl, jsou tak či onak založené na matematice.“ Zatímco mluvil, vytáhl z kapsy balíček karet. „Posaď se, začneme něčím jednoduchým.“

Úloha 2. (6 bodů): Ze zamíchaného balíčku karet náhodně vytahujeme po jedné kartě. Určete kolik musíme karet vytáhnout, abychom měli jistotu, že mezi vytaženými kartami bude celá postupka, dva až eso, nehledě na barvu a znak karet.

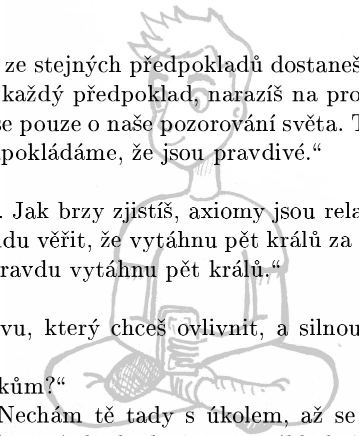
„Pravděpodobnosti? Vždyť to je základ.“

„Opravdu? Tak teď mi řekni, jaká je pravděpodobnost, že vytáhnu pět králů po sobě.“

„Nula, pět králů v balíčku není.“

Max jen zvedl obočí a vytáhl z balíčku pět karet. Všichni byli králové. „No tak jsi tam jednoho propašoval,“ převrátil oči Jirka. Max odkryl dalšího krále. A dalšího. Otočil všechny karty a na všech důležitě trůnil král. Jirka jen nevěřícně hleděl. Jakmile natáhl ruku, aby se karet dotkl, vyletěly do vzduchu a s dopadem se proměnily zpátky na původní hodnoty. „Dobře, poslouchám.“

„Základem matematiky je logika, odvozování složitějších závěrů z jednoduchých základů, odhalování vzorců a systémů ve zdánlivě náhodilých soustavách. Matematika popisuje svět v jeho nejčistší podobě. Chytáš se?“



„Myslím, že jo.“

„Logika je neměnná, pokud aplikuješ logiku, ze stejných předpokladů dostaneš vždy stejné výsledky. Pokud se však pokusíš dokázat každý předpoklad, narazíš na problém. Ty nejjednodušší základy nelze dokázat, opírají se pouze o naše pozorování světa. Těmto nedokázatelným tvrzením říkáme axiomy a předpokládáme, že jsou pravdivé.“

„A jsou?“

Max se usmál. „A dostáváme se k jádru věci. Jak brzy zjistíš, axiomy jsou relativní, závisí do jisté míry na našem vnímání. Pokud budu věřit, že vytáhnu pět králů za sebou a přesvědčím o tom ne jen sebe, ale i realitu, opravdu vytáhnu pět králů.“

„Tak lehké to být nemůže.“

„Není, vyžaduje to dokonalé porozumění jevu, který chceš ovlivnit, a silnou vůli. Proto se musíš zdokonalit v matematice.“

„A kdy se budu moct začít učit takovým trikům?“

„Klidně hned. Ale bude ti to chvíli trvat. Nechám tě tady s úkolem, až se ti ho podaří splnit, budeš připravený na další lekci.“ Zpoza jednoho kamene vytáhl obyčejnou šachovnici a černou figurku dámy. „Přesvědč tuhle šachovnici, že nemá 64 ale 100 políček. Až se ti to povede, přesvědč tuhle figurku, aby se sama hýbala.“

„Ale jak? Vůbec nic jsi mi nevysvětlil.“

„Soustřeď se,“ pokrčil Max rameny a zmizel.

Úloha 3. (8 bodů): Hanka a Tomáš hráli šachy na speciální šachovnici 10×10. Hanka si navíc vynutila i extra figurku zvanou Slečna. Slečna mohla jezdit na koni a tedy se pohybovat jako jezdec, nebo se mohla, jako správná slečna, pohybovat v přímém směru, to znamená po řadách nebo sloupcích, nicméně jen o jedno pole. Rozhodněte a dokažte, zda je možné se slečnou, na počátku stojící v rohu šachovnice, dojít do protilehlého rohu tak, aby stoupla na každé pole právě jednou.

Marně se snažil meditovat, přemlouvat i řvát. Šachovnice zůstala v původním stavu, figurka tvrdohlavě seděla na jednom místě. Frustrovaně obojí strčil do aktovky a vydal se domů, na tohle dneska neměl sílu.

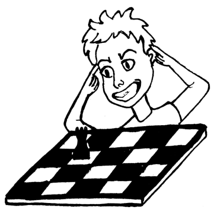
* * *

Druhý den, v hodině občanky, se nic zajímavého nedělo. Učitelka celou dobu povídala o jakémsi podivínovi z antického Řecka, který žil v sudu. Aby se zabavil, procvičoval si Jirka kombinatoriku.

Úloha 4. (7 bodů): Kolik lidí bylo ve třídě, když si každý s každým potřásl rukou a dohromady bylo 153 potřesení?

Při výpočtu udělal Jirka chybu. Tedy ne při výpočtu, rovnou v zadání si zapsal špatné číslo. Postup byl naštěstí stejný, stačilo zaměnit číslo. Zaměnit číslo … Uprostřed výpočtu se zastavil. Docvaklo mu, co se snažil Max vysvětlit. Postup je stejný, stačí změnit paramtery.

Rychle z aktovky vytáhl šachovnici, stále měla 64 polí. Zavřel ji a pak zavřel oči. Stačí pozměnit číslo. Otevřel oči i šachovnici. A hele, měla 100. Rychle ji zaklapl, než si někdo všimne, a spokojeně se usmál. Tak v tom byl ten trik.



Jakmile skončila poslední hodina, celá třída se rozprchla domů. Jediný Jirka zůstal sedět ve vestibulu a po chvíli se nenápadně odplížil do sklepení. Na kameni uprostřed zenové zahrádky znova vytáhl šachovnici a figurku.

Po pár pokusech se mu podařilo zopakovat trik s větším počtem políček. Chvíli trvalo, než přišel na to, jak přesně se mu to v hodině povedlo, a i teď cítil, že bude muset hodně trénovat, aby mohl takové věci provádět spolehlivě. Teď před ním však stála nová výzva; šachová figurka.

Šachovnice v principu nepředstavovala problém. Šlo jen o jednoduchou kvantitativní změnu. Ale jak přesvědčit předmět, ať se hýbe? Jirka nad tou otázkou meditoval skoro dvě hodiny. Když už málem došel k závěru, že pohyb prostě nejde vyjádřit matematicky, rozsvítilo se mu. Co jiného je fyzika než popis světa matematikou? Stačí tedy měnit velikost vektoru síly působící na figurku… Figurka se pohnula. Jirka se usmál.

* * *

Úloha 5. (9 bodů): Rybář Petr si šel zachytat k vodnímu kanálu. Úsek, ve kterém chytá, má tvar obdélníku 40×60 m. Echolotem - (přístrojem, který mapuje vodní dno, polohu a počet ryb) zjistil, že v této části se nalézá 222 ryb. Petr si z echolotu překreslí informace na papír, kde ryby bude považovat za bod. Předpokládejme, že ryby zůstávají nehnutě, pokud od nich nástraha neleží ve vzdálenosti 2,5 m. Rybář Petr se nyní zamyslí a určí si jedno místo, na které bude nahazovat na milimetry přesně. Dokažte, že existuje takové místo, že Petr chytí 2 ryby a bude tak mít jídlo pro rodinu na štědrovečerní večeři.

Hodiny matematiky začaly Jirku neuvěřitelně nudit. Všechny úlohy se mu teď zdály průhledné a ani učitelovy pokusy zabalit je do vánoční tématiky nepomohly. Cožpak by se nenašlo něco složitějšího, co by Jirku opravdu donutilo přemýšlet?

Úloha 6. (5 bodů): Petr se ptal pratety, kolik je prastrýcovi let. Prateta mu odpověděla takto: „To víš, už dávno nám není padesát, ale zase nám ještě není osmdesát let. Když vynásobíš součet mého a prastrýcova věku jejich rozdílem a k výsledku přičteš oba naše věky, dostaneš 492.“ „Aha,“ řekl po chvíli Petr, „tak to je prastrýcovi...“ Kolik let je Petrovu prastrýcovi, víte-li, že je starší než Petrova prateta?

Kdy už konečně skončí to nudné utrpení? Na to, že má školní hodina jenom čtyřicet pět minut, občas se zdá, že trvá věčnost. Jirka se rozhodl tento jev připsat Einsteinově teorii relativity.

Nevěděl však, že jeho touha po výzvě bude brzy vyplněna. Když se chtěl zvednout po zvonění z lavice, z každé strany ho na židli přidržel jeden spolužák v bílém. Třetí zamknul dveře za odcházejícím učitelem. Naproti Jirkovi se postavila Žofka.

„A co po mě chceš ty?“ zeptal se neurvale.

„Tak je to pravda. Myslíš si, že na tebe nemůžeme, co? To se ještě uvidí.“ Jeden z Žofčiných posluhovačů před každého z nich položil papír a tužku.

„Co to má být?“

„Matematický duel. Chceš odsud odejít? Musíš mě porazit. Tome, začni.“ Poskok po Jirkově pravici začal diktovat úlohu. Jirka, otrávený a naštvaný, měl chuť vyrvat se z jejich sevření a utéct ze třídy, ale zároveň chtěl dát Žofce co proto. Začali tedy rychle řešit.

Oba pracovali urputným, ale vyrovnaným tempem. Tom odříkával úlohu za úlohou. Čím složitější úlohy byly, tím podivnější souboj byl. Jirkovi se zdálo, že třída se v jeho periferním vidění začala deformovat. Písmena a čísla na jeho papíře začala přeskakovat, tvořit nahodilé obrazce až nakonec sestavily samostatné úlohy navíc. Začal se potit, Žofka se šíleně křenila.

Už to netrvalo dlouho. Vysílen, Jirka ztratil vědomí.

Řešení úloh 3. série posílejte do ***31.1.2019*** *na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 11 Bílovec

Vánoční Víkendovka s KoKoSem

Abychom Ti ještě více přiblížili náš korespondenční seminář KoKoS a zároveň Tě odměnili za Tvou snahu, připravujeme pro Tebe speciální Vánoční Víkendovku s KoKoSem, která proběhne 7.–10. 2. 2019 v budově Domova mládeže při Gymnáziu Mikuláše Koperníka v Bílovci, a to pod pedagogickým dohledem za organizace studentů gymnázia.

Jedná se o 4 dny plné zábavy, her, a také přednášek na témata matematická, fyzikální či chemická. Cena, stanovená na 300 Kč, zahrnuje veškerý program včetně stravy a ubytování a vánočního dárečku. V případě dotazu se můžeš obrátit na náš email *gmkkokos@seznam.cz*, kde Ti rádi všechno vysvětlíme. Jinak už neváhej a vyplň naši internetovou přihlášku, kterou najdeš na našich webových stránkách *kokos.gmk.cz*. Poté, co ji obdržíme, Ti do několika dnů zašleme email s podrobnými informacemi. Těšíme se na Tebe!

Autorská řešení 2. série

Úloha 1.

Do závorky vždy budu uvádět z jakého tvrzení vyvozuji. Podle (3) Petr preferuje algebru a nemůže nosit pero (1) ani fix (6). Z toho vyplývá, že musí mít tužku a je podle (4) příjmením Černý. Podle (2) Tomáš nenese příjmení Bílý, a protože Petr je Černý, zbyde na Tomáše příjmení Šedý. Podle (5) na něj zbyde statistik a z (1) nenosí pero, musí nosit fix. Na Jana zbývá pero, je geometrik a příjmením je Bílý.

Tomáš Šedý nosí fix.
Tužku nosí Petr Černý, k určení je zapotřebí čtyř tvrzení: (1), (3), (4), (6).

Kuba

Úloha 2.

Výšku místnosti označme x. Z Pythagorovy věty vyjádříme dráhu prvního pavouka: $s_1 = \sqrt{144 + x^2}$ m, spočítáme dráhu druhého pavouka: $s_2 = 15$ m. Vyjdeme z faktu, že časy se rovnají, poté za ně doplníme vzoreček pro rychlost a dráhu.

$$
\begin{aligned}
t_1 &= t_2 \\
\frac{s_1}{v_1} &= \frac{s_2}{v_2} \\
\frac{\sqrt{144 + x^2}}{0{,}26} &= \frac{15}{0{,}3} \\
\sqrt{144 + x^2} &= 13 \qquad \text{/umocníme na druhou} \\
144 + x^2 &= 169 \\
x^2 &= 25 \\
x &= 5
\end{aligned}
$$

Místnost je vysoká 5 m.

Pirát

Úloha 3.

Označme čitatel zlomku, tj. výraz $42 - abc$ jako p. Má-li být daný podíl přirozené číslo, musí být p přirozené číslo dělitelné osmi menší než 42. V úvahu tedy přicházejí čísla 40, 32, 24, 18, 8.
Tomu odpovídají tyto hodnoty součinu abc: 2, 10, 18, 26, 34. Tato čísla napíšeme jako součin tří navzájem různých přirozených čísel: 2 takto zapsat nelze, $10 = 1 \cdot 2 \cdot 5, 18 = 1 \cdot 2 \cdot 9 = 1 \cdot 3 \cdot 6, 26 = 1 \cdot 2 \cdot 13, 34 = 1 \cdot 2 \cdot 17$.

Řešením jsou tedy tyto uspořádané trojice čísel a, b, c:
$[1, 2, 5]$, $[1, 2, 9]$, $[1, 3, 6]$, $[1, 2, 13]$, $[1, 2, 17]$.

Bára

Úloha 4.

V této úloze je použito řešení pomocí invariantu (něčoho co se v průběhu nemění). Invariantem pro nás je součet všech čísel na tabuli.
Jak vypočítat součet čísel od 1 do 200?
Vytvořme si dvě množiny: $M = \{1; 2; 3; \ldots, 100\}$ a $N = \{200; 199; 198; \ldots; 101\}$.
Nyní spárujeme vždy i-tý prvek z množiny M a i-tý prvek z množiny N. Když tyhle dva prvky sečteme vyjde nám prvek z množiny O:
$O = \{1 + 200; 2 + 199; 3 + 198; \ldots; 100 + 101\}$
Vidíme, že každý prvek z množiny O je 201 a počet prvků v množině je 100. Proto součet čísel od 1 do 200 $S = 201 \cdot 100 = 20100$. Víme, že na tabuli po konečném počtu kroků zůstane 5 po sobě jdoucích čísel. Označme si je $a-2, a-1, a, a+1, a+2$, součet těchto prvků musí být stejný jako součet S:
$(a - 2) + (a - 1) + a + (a + 1) + (a + 2) = S = 20100$
Po úpravě dostáváme:
$5a = 20100$
$a = 4020$

Na tabuli tak budou napsaná čísla 4 018, 4 019, 4 020, 4 021, 4 022.

Kuba

Úloha 5.
Pokud body C_2 a B leží na kružnici k, pak je kružnice Thaletovou kružnicí o poloměru $|C_2B|$ a z toho vyplývá, že trojúhelníky C_1C_2B a C_2C_3B jsou pravoúhlé u vrcholů C_1 a C_2. A proto následně za použití Pythagorovy věty:

$$\begin{aligned} x^2 + 7^2 &= (x+1)^2 + 4^2 \\ x &= 16\text{cm} \end{aligned}$$

Ondra

Úloha 6.
Poprvé vypil $\frac{1}{4}$ džusu, zbyly $\frac{3}{4}$ džusu.
Podruhé vypil $\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$ a zbyly $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$.
Potřetí vypil $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$ džusu a zbyly $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$ džusu.

Ve sklenici nakonec zbyly $\frac{3}{10}$ džusu, což je 30%.

Hanka

Zakousni se! POZNÁNÍ

Dirichletův princip

Trocha historie a překladů

Jako první tento termín použil v roce 1834 německý matematik Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet pod názvem Schubfachprinzip (zásuvkový princip). V angličtině nese označení pigeonhole principle (princip holubníku). A u nás slovanů dirichletův princip.

Základní Dirichletův princip

Nechť máme alespoň $(n + 1)$ holubů v holubníku o n přihrádkách. Pak v některé přihrádce jsou alespoň dva holubi.

Důkaz

Pokud by v každé přihrádce byl nejvýše jeden holub a přihrádek je n, pak by muselo být nejvýše n holubů. My ale máme o jednoho holuba více, což je spor. Musí tedy nutně alespoň v jedné přihrádce být dva holubi. Poněkud zajímavější je obecnější podoba tohoto principu.

Obecnější znění

Umístíme-li $(kn + 1)$ holubů do n přihrádek (k, n jsou přirozená čísla), pak v alespoň jedné přihrádce bude alespoň $k + 1$ holubů. Důkaz je obdobný.

Uplatnění

Princip sám o sobě je velice jednoduchý a snadno pochopitelný a velice vhodný pro matematickou olympiádu. Poněkud obtížnější je to s jeho užitím. V úloze je vždy potřeba najít ty správné „holuby a přihrádky“, abychom princip mohli použít. Nejpozoruhodnější na samotném principů je však jeho překvapivě široké využití při řešení na první pohled velice náročných problémů v oblasti teorie čísel, matematické analýzy, kombinatorické geometrie a dalších, jako jsou teorie grafu či pravděpodobnost.

Praxe

Na ukázku si tedy pár vzorových příkladů vyřešíme:

Úloha 1: V pouzdře je 10 černých propisek a 5 zelených propisek. Bez toho, abychom do pouzdra nahlíželi, z něj budeme vytahovat po jedné propisce. Otázkou je, kolik nejméně budeme muset vytáhnout propisek, abychom měli jistotu, že budeme mít alespoň jeden pár stejné barvy.

Řešení:
K dispozici máme 2 různé barvy propisek, proto nám stačí náhodně vybrat $2+1 = 3$ propisky.

Úloha 2: Kolik musí být ve skupině lidí, abychom mohli říci, že aspoň dva se narodili určitě:

a) ve stejném dnu týdne?

b) ve stejném měsíci?

c) mají narozeniny ve stejném dnu roku?

Řešení:

a) Počet dní v týdnu je 7 – to jsou ty naše přihrádky. Musíme mít aspoň $(7+1)$ (holubů) lidí, aby se narodili ve stejný den v týdnu.

b) V roce je 12 měsíců (přihrádek) . Počet lidí musí být o 1 větší než počet přihrádek, proto 13 lidí.

c) V tomto případě musíme započítat 366 dní (přihrádek). Počet lidí musí být teda alespoň o 1 větší, tudíž 367.

Úloha 3: Dokažte, že v USA je alespoň 2000 lidí se stejným počtem vlasů na hlavě - nepočítá se pleš. V průměru máme 100 000 vlasů, přitom však platí, že v závislosti na přírodní barvě vlasů se počet mění. Světlovlasí lidé mívají až 140 000 vlasů, zatímco zrzaví „jen“ asi 80 000 vlasů. Maximální počet vlasů, který může mít člověk na hlavě, je odhadován na 200 000.

Řešení:
Kdyby od každého počtu vlasů (1 až 140 000) bylo maximálně 1 999 lidí, měli bychom $1999 \cdot 140000 = 279860000$ lidí. USA má však zhruba 325 milionů obyvatel, proto minimálně jeden počet musí být zastoupen alespoň 2000 krát.

Úloha 4: Na konferenci je 42 vědců. Při zdravení si podávají ruce. Jelikož každý nemá rád každého, tak buď si podají ruce nebo nikoli. Dokažte že existují alespoň dva, kteří si při slavnostním zahájení potřásli rukou se stejným počtem účastníků.

Řešení:
Počet účastníků, se kterými si každý mohl potřást rukou, je vyjádřen nezáporným celým číslem z množiny $\{0, 1, 2, ..., 42\}$. Vzhledem k tomu, že počet 0 a 41 nemohou nastat současně, máme k dispozici maximálně 41 možností pro 42 osob. Alespoň dva si tedy nutně museli podat ruku se stejným počtem lidí.

Úloha 5: Množina obsahuje 2014 libovolných celých čísel. Dokažte, že alespoň jeden rozdíl je dělitelný číslem 2013.

Řešení:
Každé číslo z množiny si můžeme zapsat jako $a = 2013 \cdot k + t$, kde k a t jsou celá čísla a $t \in \langle 0; 2012 \rangle$. Nyní si řekněme, kdy je rozdíl dvou čísel dělitelný číslem 2013. Právě tehdy, když t u těchto dvou čísel je stejné. Máme 2013 možností u t a 2014 čísel. Podle dirichletova principu je alespoň 1 rozdíl dvou čísel dělitelný 2013.

Úloha 6: Uvnitř čtverce o straně 8 cm je umístěno 5 bodů. Dokažte, že aspoň dva body jsou vzdáleny od sebe méně než 6 cm.

Řešení:
Rozdělíme čtverec na 4 čtvrtiny; bodů je 5, tedy aspoň v jedné čtvrtině budou aspoň dva body. Čtvrtina představuje čtverec o straně 4 cm; nejdelší úsečkou je úhlopříčka a ta měří $4\sqrt{2}$, což je zaokrouhleně $5,7 < 6$. Každé dva vnitřní body jsou vzdáleny méně než $5,8 < 6$ (cm).

Výsledkové listiny

Tady najdete jen několik nejlepších řešitelů, pro úplné výsledkové listiny se podívejte na naše internetové stránky.

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Michal	Maděřič	4	-	-	2	-	5	11	11

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Milan	Holotňák	5	7	6	8	9	5	40	80
2.	Natálie	Vylamová	3	7	7	7	9	5	38	62
3.	Alexandra	Seďová	5	-	5	-	4	5	19	32
4.	Alžběta	Sedláčková	3	6	7	0	7	5	28	28

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Vilém	Bednařík	5	7	8	8	9	5	42	84
2.	Jana	Dreiseitlová	4	7	8	8	9	5	41	74
3.	Lukáš	Pohořelský	3	7	2	0	8	5	25	67
4.	Adam	Jemelka	5	7	7	-	-	5	24	57
5.	Radim	Jeřábek	5	7	1	0	9	5	27	53
6.	Karolína	Biolková	5	7	8	8	-	5	33	51
7.	Linda	Tomišová	-	7	6	0	9	1	23	44
8.	Jakub	Feichtinger	0	7	3	-	9	5	24	43
9.	Monika	Štábová	-	-	-	-	-	-	0	42
10.	Aneta	Formánková	1	7	6	0	0	1	15	37
11.	Alexandra	Obracajová	5	4	5	0	-	0	14	21
12.	Jakub	Macíček	-	-	-	-	-	-	0	12

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Anna	Hronová	5	7	8	8	9	5	42	77

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
2.	Adam	Kutálek	5	7	8	0	9	5	34	68
3.	Lída	Kačenková	1	-	-	-	-	1	2	36