KOKOS

31.ročník ⋆ 2.leták

Milý řešiteli,
děkujeme Ti za Tvou snahu v první sérii. Přejeme Ti, ale i všem ostatním řešitelům, aby se tato série vydařila přinejmenším tak dobře jako uplynulá. Opět jde o standardní počet šesti příkladů, které jsou ještě zajímavější než minule! Proto si za deštivého podzimu vyhraď jedno mokré odpoledne na náš seminář a řeš, dokud venku neuschne. Pokud sis nevěděl rady s některými úlohami, přinášíme rovněž autorská řešení, stejně jako nezbytné výsledky! Hodně štěstí!

Zadání úloh

Člověk by si řekl, že dvacet matematiků by vyřešilo cokoliv, ale není tomu tak. I když se Jirkovi podařilo do Bílovce dostat všechny své kamarády ze soutěží a olympiád, místní problém stále setrvával. Co by se také dalo dělat proti tajným organizacím, které svá tajemství střeží lépe než straka zlatou cetku.

Některým mladým matematikům se podařilo soupeřící skupiny infiltrovat, ale neměli dost času na to, aby se v jejich hierarchii posunuli dost daleko. Ve výsledku nebyli nic víc než levná pracovní síla.

Jirka se držel většinu času zpátky. Nechtěl se stále namočit do ničeho, čemu nerozuměl. Přátelé však přijeli a odjeli a nikdo nebyl o nic moudřejší. Všichni se báli, že proti sobě nejspíše poštvali nebezpečné lidi. Kdo mohl, spakoval se co nejrychleji a odjel z Bílovce nejbližším vlakem.

Jakmile však ostatní odjeli, začal si Jirka všímat nových věcí okolo sebe. Někteří z jeho spolužáků a studentů starších ročníků začali nosit velice specifické oblečení a chvílemi se chovali opravdu podivně.

Úloha 1. (5 bodů): Partu tří kamarádů tvoří Petr, Jan a Tomáš a jejich příjmení jsou Černý, Šedý a Bílý. U sebe nosí každý z nich jednu z psacích potřeb(tužka, fix, pero) a každý dává přednost jinému oboru matematiky(algebra, geometrie a statistika). Víme:
(1) Pero nosí geometrik
(2) Tomáš se nejmenuje Bílý
(3) Petr preferuje algebru
(4) Černý nosí tužku
(5) Bílý není statistikem
(6) Petr nenosí fix

KoKoS, Gymnázium Mikuláše Koperníka, 17.listopadu 526, 743 11 Bílovec

Otázka zní: Jak se jmenuje křestním jménem i příjmením ten z chlapců, který nosí fix? Které předpoklady potřebujete, abyste určili, jak se jmenuje ten, kdo nosí tužku?

Jirka se už ničím zatěžovat nechtěl. Všechny obálky, které nacházel ve skříňce, sešitech a knížkách rovnou zahazoval. Matematiku měl sice rád, ale takové cavyky okolo ní dělat nechtěl. Bohužel to nevypadalo, že by se mohl problému zbavit tak snadno.

Během následujícího měsíce se začali divně oblíkat skoro všichni. Skupinky černě oděných studentů chodily po chodbách v pevně semknutých hloučcích a nepřátelsky se mračili na party nosící bílou. Žáci obou barev se začali shlukovat okolo několika starších, kteří se zdáli být ve vedení.

Najednou nestačilo vyhazovat obálky, Jirka musel čistit batoh, který mu někdo počmáral bílým centrofixem, musel přepisovat sešit politý černou barvou. Začali do něj na chodbách vrážet lidé ze starších ročníků, které vůbec neznal. Každý den se na něj hnusně hleděl dav zhnusených tváří.

Celé to vyvrcholilo jednou po vyučování. Jirka zůstal ve škole déle, kvůli doučování z chemie, a chystal se zajít s kamarády na squash. Když si však v šatně dával věci do skříňky, někdo ho zezadu popadl za ruce, zacpal mu pusu a přehodil pytel přes hlavu. S pořádnou dávkou námahy a hekání útočník Jirku vytáhl do nejvyššího patra, otevřely se dveře a Jirka byl vhozen dovnitř.

Když ho opřeli o stěnu a sundali mu pytel z hlavy, viděl v šeru před sebou tři zakuklené postavy. Od hlavy k patě byli všichni oblečení v černém.

„Tak, Jirko," promluvil prostřední. „Jelikož děláš zbytečné vlny, rozhodli jsme se použít přímější řešení."

„Chvilku tě tady necháme," ozval se další „dokud nepřijdeš k rozumu. A kdyby ses snad dneska pořád nemohl rozhodnout, počítej s tím, že tady budeš sedět každý den."

A tak Jirku nechali zamčeného v matematické třídě. Ubíhala minuta za minutou, uběhla první hodina. Jelikož už přišel listopad, brzy se za okny začalo stmívat. Ve třídě nebylo, co dělat, snad jen pozorovat pavouky.

Úloha 2. (7 bodů): V místnosti tvaru kvádru, jehož vrcholy jsou označeny A-H (při běžném označení) a $|AB| = 12$ m, $|BC| = 9$ m, se nacházejí dva pavouci. První pavouk leze nejkratší trasou z vrcholu E do B, přičemž jeho rychlost je 0,26 km/h, druhý pavouk leze opět nejkratší trasou z vrcholu A do C rychlostí 0,3 km/h. Oba pavouci tyto vzdálenosti překonají za stejný čas.
Jak je místnost vysoká?

A když už odešli i pavouci a Jirka se chystal ustlat si pod jednou z lavic, aby mohl ve třídě strávit noc, ozvalo se cvaknutí klíče v zámku. Jirka se podezřívavě ke dveřím otočil a radši se postavil za stůl, aby mezi sebou a útočníky měl alespoň jednu překážku. Asi minutu se nic nedělo a nešlo nic slyšet. Pak se dveře jakoby samy od sebe pootevřely.

Jirka se rychle schoval pod stůl. Ale pořád se nic nedělo, žádné kroky, žádné další zvuky. Opatrně zvedl hlavu. Nic. Pomalu a potichu se vydal ke dveřím. Nenápadně do nich strčil prstem. O něco se pootevřely, ale nikdo za nimi nebyl. Rozhlédl se po chodbě, a když viděl, že nikdo není v dohledu, vydal se po špičkách na cestu do šatny.

Ve vestibulu se pořád svítilo, ale to nebyl problém, stačilo rychle proběhnout po schodech. Už, už chtěl Jirka proběhnout, vtom si však všiml, že na jednom ze stolů sedí záhadná osůbka. V zeleném triku a barevných volných kalhotách vypadala naprosto nepatřičně v poměru se svou meditační pózou.

Jakmile se Jirka objevil v jejím zorném poli, otevřela oči a přitrouble se usmála.

„Právě na tebe tady čekám, Jirko."

„A ty patříš ke kterým? Černým nebo bílým?"

„Černá, bílá, to nic neznamená. Já patřím sama sobě. Mimochodem, říkají mi Majda." Nadšeně potřásla Jirkovi rukou.

„Proč tady na mě čekáš? A jak vůbec víš, že tady jsem?"

„Mám své zdroje. Slyšela jsem, že jsi nadaný matematik, chtěla jsem se sama přesvědčit."

„Aha, takže ty bys mě taky chtěla to něčeho zatáhnout."

„Nebudu tvrdit, že ne, ale volba je jen na tobě. Když řekneš ne, nechám tě být." Vytáhla z kapsy kus papíru a tužku. „Spočítej mi jeden příklad a pak se uvidí? Co ty na to?"

Úloha 3. (8 bodů): Najdi všechny trojice přirozených čísel a, b, c tak, aby $a < b < c$ a hodnota zlomku $\frac{42-abc}{8}$ byla přirozené číslo.

Jirka příklad vyřešil během pár minut a tázavě se na Majdu podíval. Hloupě se zaculila a seskočila ze stolu. „Ani to nebolelo ne?"

„Zjistilas, cos potřebovala?"

„A možná ještě víc."

„Takže mě teď necháš na pokoji?"

„Podívej, řeknu ti to takhle." Opřela se lokty o stůl a upřeně se na něj zahleděla. „Opravdu tě do ničeho nutit nebudu, ale tvoje problémy nepřestanou. Pokud se nechceš přidat ani k jeděm z těch ostatních a nechceš trávit každý pátek odpoledne zavřený v učebně, můžeš se přidat k nám. My s nikým nesoupeříme, nechceme nikoho provokovat, ale ostatní z nás mají respekt. U nás bys byl v bezpečí."

„Vás je víc?"

„Samozřejmě. Nechám ti čas na rozmyšlenou, protože vidím, že se ke mně zrovna teď moc nemáš. Měj se jak chceš." Než se Jirka stačil zeptat na něco dalšího nebo se rozloučit, vyběhla hlavním vchodem a zmizela venku.

* * *

Uběhl týden a situace se pro Jirku jen zhoršovala, ani jeho kamarádi se s ním moc nebavili. Pepa, celý v černé, mu přímo řekl, že pokud se k němu nepřidá, nemá se s ním o čem bavit. Žofka, celá v bíle, ho jednoduše ignorovala.

V pátek se Jirka opět ocitl v nejvyšším patře školy v učebně matematiky. Nečekal, že by ho tentokrát někdo zachraňoval, a snažil se nějak zabavit, aby neumřel nudou.

Úloha 4. (8 bodů): Na tabuli je napsaná řada čísel od 1 do 200. Jirka vždy vezme 2 čísla, sečte je a napíše na tabuli. nakonec bylo na tabuli napsáno 5 po sobě jdoucích čísel. Jaké číslo je nejmenší napsané na tabuli.

Když už však byla celá tabule popsaná a venku se setmělo, rezignoval na jakoukoliv zábavu a jen seděl opřený o stěnu. Málem se mu už zavřely oči a hlava padla na stranu, ale stejně jako minulý týden se ozvalo cvaknutí klíče v zámku. Jenže dveře od třídy se neotevřely.

Místo toho se odsunul kus stěny naproti tabule. Jirka se zvedl a opatrně do otvoru nahlédl. Úzké schodiště osvětlené poblikávajícími zářovkami klesalo hluboko pod úroveň podlahy, nejspíše až do sklepa. Sice se docela bál, ale vzhledem k tomu, že neměl nic jiného na práci a celou noc v té učebně strávit nechtěl, vydal se po schodech dolů.

Šel snad i několik minut, za chvíli si byl jistý, že už je daleko pod základy školy. Pak najednou schodiště skončilo, chodba se rozšířila a zářivky plynule přešly v krásná světla roztodivných tvarů.

Nakonec Jirka došel do kruhové místnosti, která byla celá vysypaná šedivým šterkem. Celou podlahu pokrývaly obrazce pravidelné, chaotické i mozek zavařující. Celé to vypadalo jako podzemní zenová zahrádka.

Na konci cestičky z kamenů ponořených ve štěrku, uprostřed místnosti seděla Majda. Se zábleskem v očích vyskočila na nohy a rozběhla se po němu po kamenech. „Ahoj, Jirko."

„Co je tohle za místo?" Rozhlížel se Jirka zmateně okolo.

„Takové naše malé útočiště, nelam si s tím hlavu. Hlavní je, že jsi dorazil."

„A co tady dělám?"

„Chtěla jsem tě trochu popíchnout se zvážením mojí nabídky. A taky ti ukázat, co tě čeká, když na ni přistoupíš."

„No, už jsem tady, takže poslouchám."

„Výborně! Tak mi vyřeš tohle." Majda z kapsy zase vytáhla kus papíru se zadáním a tužku.

„Proč bych měl pořád něco řešit? K čemu vám to je?"

„Moc nekecej a řeš, sám uvidíš."

Úloha 5. (9 bodů): Je dán pětiúhelník $ABC_3C_2C_1$. Bod D je středem C_2B , na kružnici k se středem v bodě D leží body $C_1C_2C_3$ a B. Velikost C_2C_3 je rovna x, $|C_3B| = 7\text{cm}$, $|C_2C_1| = x + 1$, $|C_1B| = 4\text{cm}$. Určete velikost úsečky x.

Celou dobu, co Jirka řešil, se mu Majda dívala přes rameno. Občas nadšeně přikyvovala a občas se zase mračila. Jakmile úlohu dopočítal, nadšeně poskočila, zatleskala a vypískla.

„Řekneš mi už konečně,s k čemu to bylo dobré?"

„Jen se podívej! Podívej se!" Stále poskakovala z nohy na nohu a ukazovala na obrazce ve štěrku. Jirka nejdříve nechápal, co se mu snaží říct, ale pak si všiml, že kamínky se samovolně posouvají a mění tvary.

„Co to znamená?"

„Znamená to, že zábava teprv začíná." Dříve než stačil zaprotestovat, klepla ho po hlavě a najednou se propadl do země. Chvilku měl pocit, že padá, pak otevřel oči a zjistil, že sedí na lavičce šatně. Vedle něj se na zem snesl kus barevného papíru s krátkou zprávou: *Potkáme se v pondělí po škole na Besedě.*

* * *

Úloha 6. (5 bodů): Jirka pil na Besedě ze sklenice džus. Čtvrtinu džusu z ní vypil. Pak si nechal sklenici dolít vodou a upil pětinu obsahu. Znovu mu sklenici dolili vodou a Jirka z ní upil polovinu. Opět mu dolili vodu. Kolik procent čistého džusu zbylo ve sklenici?

„Tak co, dohodnuto?" naklonila se Majda přes stůl.

„A opravdu můžu kdykoliv vycouvat?"

„Kdykoliv."

„V tom případě dohodnuto." Potřásli si rukama.

*Řešení úloh 2. série posílejte do **10.12.2018** na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 11 Bílovec

Autorská řešení 1. série

Úloha 1.

Označme počet zákazníků z prvního dne jako x a cenu kola jako y. Takže první den Frantova situace vypadala: $35x + 1125 = y$
Druhý den měl vyděláno na celé kolo a 37 Kč k tomu:

$$\frac{8x}{9} \cdot 112 = y + 37$$

$$\frac{8x}{9} \cdot 112 - 37 = y$$

Obě rovnice dávají hodnotu y, tedy je můžeme porovnat:

$$35x + 1125 = \frac{8x}{9} \cdot 112 - 37$$

$$x = 18$$

Celkový počet lidí, kteří si koupili limonádu je pak: $112 + 18 = 130$.
Cenu limonády druhého dne už vypočteme hravě: $\frac{8}{9} \cdot 18 = 16$ Kč.
Podle druhé rovnice spočítáme cenu kola: $y = (16 \cdot 112) - 37 = 1755$ Kč.
(Pro zajímavost Franta celkem vydělal 2422 Kč.)

Zuzka

Úloha 2.

Jestliže má být hledané číslo dělitelné 5, 6 a 8, pak musí být dělitelné i nejmenším společným násobkem těchto čísel, což je 120.

$6 = 2 \cdot 3$
$8 = 2^3$
$n(5, 6, 8) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Protože se násobek čísla 120 musí pohybovat v intervalu od 157 000 do 157 999 a hledáme nejmenší číslo z tohoto intervalu, 157 000 vydělíme 120.

$157000\ 120 = 1308(40)$

Jelikož vyšel podíl se zbytkem, 1308 vynásobíme 120.

$1308 \cdot 120 = 156960$

Výsledek ale nepatří do daného intervalu, tudíž k němu přičteme 120 a dostaneme nejmenší číslo dělitelné 5, 6 a 8 v tomto intervalu, tedy 157 080.

Zuzka

Úloha 3.

Pojmenujme naše dva kamarády Jirka a Barča. Označme si věk Jirky jako a(roků) a věk Barči jako b(roků), potom součin jejich věků je $a \cdot b = 272$. Zvolme Jirku starším z dvojice, kdyby měl o 4 roky více, jeho věk by byl $(a+4)$. Potom by byl věk Barči $(b-4)$. Pro tuto situaci platí $(a+4) \cdot (b-4) = 252$.
Dostaneme soustavu dvou rovnic:

(1) $a \cdot b = 272$

(2) $(a+4) \cdot (b-4) = 252$

Upravíme druhou rovnici:

(2) $ab - 4a + 4b - 16 = 252$

Všimněme si, že součin $ab = 272$ známe z první rovnice:

(2) $272 - 4a + 4b - 16 = 252$

Po úpravě dostáváme:

(2)$4(a-b) = 4$ $(4 \cdot 1 = 4)$

Aby byl rozdíl 1, musí být Jirka o rok starší:

Vyjádřeme věk Jirky jako Barčin věk zvětšený o jedna $a = (b+1)$. První rovnici zapišme:

(1)$(b+1) \cdot b = 272$

Řešme kvadratickou rovnici:

(1) $b^2 + b - 272 = 0$ $(b_1 = -17, b_2 = 16)$

Věk nemůže být záporný, proto je Barči 16 let. Jirka má tedy 17.

NEBO (s využitím prvočísleného rozkladu)

Číselné hodnoty jejich věků dělí 272. Prvočíselný rozklad čísla $272 = 2^4 \cdot 17$. Jeden z věků musí být nutně násobkem 17 a zbylí součinitelé dávají číslo 16. Tato čísla zároveň splňují podmínku rozdílu věků, a proto je dvojice 16, 17 řešením.

Dohromady mají 33 let.

Kuba

Úloha 4.

Označme si poloměr malé kružnice jako r_2.
Pomocí pythagorovy věty můžeme spočítat úhlopříčku čtverce.

$$\sqrt{(4r_1)^2 + (4r_1)^2} = \sqrt{3200} = 56,56$$

Víme, že délka této úhlopříčky je $4r_1 + 4r_2$.
Nyní si spočítáme poloměr $r_2 = (56,56 - 4r_1)/4 = 4,142\text{cm}$.
Pro malý kruh se jeho obsah $S_1 = \pi \cdot r_2^2 = 17,156\pi\text{cm}^2$.
Obsah 4 velkých kruhů je $S_2 = \pi \cdot r_1^2 = 400\pi\text{cm}^2$.
Celkový obsah kruhů je $S_3 = S_1 + S_2 = 417\pi\text{cm}^2$.
Obsah čtverce je $S_4 = (4r_1)^2 = 1600\text{cm}^2$.
Teď spočítáme kolik procent zabírá S_3 v S_4.
$x = (S_3/S_4) \cdot 100 = 81,875\%$.
Malá kružnice má poloměr 4,125cm a kruhy zabírají 81,875% plochy čtverce.

Kuba

Úloha 5.

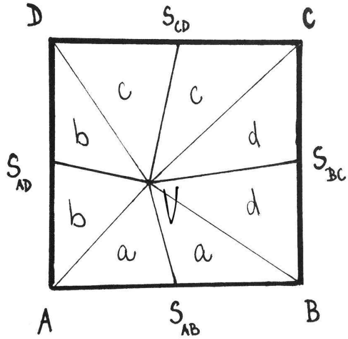
Jelikož mohli všichni buď lhát, nebo mluvit pravdu nemohla Constance tvrdit, že jen ona mluví pravdu. Vyplývá z toho tedy, že lže, takže lžou všichni. Jelikož Bill obvinil Dana, je jasné, že Dan je nevinný. Constance tvrdila, že banku nepřepadla, to znamená, že je minimálně jedním z pachatelů. Jestliže Dan lhal pak z toho vyplývá že dalším z pachatelů je Bill a to posledním vzhledem ke znění Alfonsova výroku. Jedinými pachateli jsou tudíž Constance a Bill.

Ondra

Úloha 6.

Označme si vrcholy čtverce postupně A, B, C, D a vnitřní bod označme V.
Využijeme faktu, že obsah trojúhelníku je stejný právě když je shodná délka strany a výšky na tuto stranu.
Trojúhelník $AS_{AB}V$ má stejný obsah jako trojúhelník $BS_{AB}V$ a ten si můžeme pracovně označme jako a. Obsah $AS_{AD}V = DS_{AD}V = b$.
Podobně pro další trojúhelníky.

Můžeme napsat soustavu čtyř rovnic:



(1) $a + b = 32\ \mathrm{cm}^2$

(2) $b + c = 40\ \mathrm{cm}^2$

(3) $c + d = 64\ \mathrm{cm}^2$

(4) $d + a = x\ \mathrm{cm}^2$

Nyní sečteme první a třetí rovnici: $(a + b) + (c + d) = 32 + 64 = 96\ \mathrm{cm}^2$
Když sečteme druhou a čtvrtou dostaneme: $(b + c) + (a + d) = 40 + x\ \mathrm{cm}^2$
Z toho vyplývá, že x musí být $56\mathrm{cm}^2$

Jirka

Výsledkové listiny

Tady najdete jen několik nejlepších řešitelů, pro úplné výsledkové listiny se podívejte na naše internetové stránky.

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Milan	Holotňák	5	6	7	8	7	7	40	40
2.	Natálie	Vylamová	3	6	7	6	1	1	24	24
3.	Alexandra	Seďová	-	6	-	-	7	-	13	13

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.-3.	Vilém	Bednařík	5	6	7	8	7	9	42	42
	Lukáš	Pohořelský	5	6	7	8	7	9	42	42
	Monika	Štábová	5	6	7	8	7	9	42	42
4.-5.	Jana	Dreiseitlová	5	6	7	8	7	-	33	33
	Adam	Jemelka	5	6	7	8	7	-	33	33
6.	Radim	Jeřábek	3	5	3	8	7	0	26	26
7.	Aneta	Formánková	5	6	1	0	1	9	22	22
8.	Linda	Tomišová	5	1	-	8	-	7	21	21
9.	Jakub	Feichtinger	3	5	3	1	7	0	19	19
10.	Karolína	Biolková	-	6	7	-	2	3	18	18
11.	Jakub	Macíček	-	1	7	-	-	4	12	12
12.	Alexandra	Obracajová	-	-	7	-	-	-	7	7

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Anna	Hronová	5	6	-	8	7	9	35	35
2.-3.	Lída	Kačenková	5	6	7	6	7	3	34	34
	Adam	Kutálek	5	6	7	8	7	1	34	34