KOKOS

30.ročník ⋆ 5.leták

Milý řešiteli,
Představuje me Ti v tomto ročníku již pátou sérii, je nabitá šesticí úloh, a tak Ti přejeme hodně zábavy s jejich řešením.

Organizátoři

Zadání úloh

„Bětko, mám skvělé zprávy," oznámil nadšeně jednoho rána Alois. „Jirka onemocněl a my za něj potřebujeme náhradu na SOUBOJ. Ty jsi naše první volba."

„Cože? Já bojovat neumím," zhrozila se Bětka.

„S nikým bojovat nebudeš, to je matematická soutěž."

„To je ještě horší! Co bych tam dělala?"

„Netvař se, jakože nic neumíš. Za poslední rok jsi udělala obrovský pokrok, už jsi lepší než většina třídy, možná dokonce i lepší než většina vyššího ročníku," uklidňoval ji Alois vřele.

„To je sice hezké, ale na soutěži jsem nikdy nebyla!"

„Všechno je jednou poprvé. Pojď, hned tě začnu trénovat."

Úloha 1. (7 bodů): Najdi nejmenší přirozené číslo, které má alespoň tři cifry a jehož hodnota po odstranění první cifry (tj. té nejvíce vlevo) klesne 21krát.

„Ta byla jednoduchá, něco těžšího nemáš?"

„No podívejme se na paní matematičku. Chceš těžší? Budeš mít těžší. Aspoň se pořádně připravíš."

„Kolik se tam řeší úloh?"

„Tolik, kolik zvládneš. Čím rychleji budeš řešit, tím více jich budeš dostávat. A teď dost mluvení! Jdeme na další úlohu!"

Úloha 2. (8 bodů): Máme konvexní útvar, který má n vrcholů a 861 úseček mezi vrcholy. Každý vrchol je spojený s každým. Kolik má útvar vrcholů?

Nad touhle úlohou se Bětka už trochu zapotila. Celou přestávku nad ní dumala, ale podařilo se jí ten problém rozlousknout až na začátku dějepisu. Řešení jí bohužel učitel hned zabavil.

„Aloisi, já nevím, jestli s vámi chci na ten SOUBOJ jet, jsem z toho opravdu nervózní. Nechtěla bych vám to pokazit, když se řeší v týmu.“

„Ničeho se neboj, nic nepokazíš. Na zítra jsme s matikářkou domluvili cvičné školní kolo, už s tebou počítáme.“

Úloha 3. (7 bodů): Učitelka matematiky se rozhodla uspořádat dvě kola SOUBOJE sedmičlenných družstev ve své třídě. V prvním kole se žáci rozdělili do družstev tak, jak chtěli. Ve druhém kole je učitelka rozdělila tak, aby nikdo nebyl v družstvu s tím, s kým už byl v družstvu v prvním kole. Jaký je nejmenší počet žáků, pro který se to učitelce vždy podaří?

První kolo, když byla v týmu s Aloisem, vyhrála Bětka s přehledem. Řešili spolu jednu úlohu za druhou a nikdo na ně neměl. Druhé kolo se však zvrhlo v lítý boj. Oba své nové týmy tlačili více a více, jen aby porazili toho druhého. I když se však snažili ze všech sil, stejně jejich soupeření skončilo remízou.

„Co jsem ti říkal, jsi na SOUBOJ jako stvořená,“ smál se vesele Alois.

„No snad to zvládnu, ale žádné výsledky nezaručuji.“

„To nikdo, všichni se tam jedou hlavně pobavit.“

* * *

V den SOUBOJE se Bětka celá klepala. Co když něco pokazí? Co když potopí celý tým?

„Přestaň stresovat,“ popíchl ji Alois. „Prostě si to užij, je to jen matika.“

„Pak něco pokazím a budete mi nadávat!“

„Ale kuš, přestaň s tím. Musíš si být sama sebou jistá, rychle ti vymyslím nějakou úlohu.“ Alois se rozhlédl po třídě, kde čekali na zahájení. Najednou ho inspirovaly hodiny nad tabulí.

Úloha 4. (8 bodů): Kolikrát během přestupného roku je minutová ručička kolmá nebo rovnoběžná s hodinovou?

Udělala sice několik numerických chyb, ale nakonec se výsledku dobrala. V průběhu se trochu uklidnila, a když přišlo zahájení, už byla nervózní jen trochu.

„Uvidíš, začneš řešit a na nervy kompletně zapomeneš.“

Alois měl jako obvykle pravdu, hned do první úlohy se Bětka zakousla a nepustila, dokud ji neměla vyřešenou. Po několika příkladech se však na jednom zasekla a nemohla s ním hnout.

Úloha 5. (6 bodů): Kladná reálná čísla a, b splňují:

$$a + \frac{1}{b} = 7$$
$$b + \frac{1}{a} = 5$$

Čemu se rovná hodnota výrazu: $ab + \frac{1}{ab}$?

Naštěstí je SOUBOJ týmová soutěž a Alois mohl Bětce pomoct. Spolu pak vyřešili další sadu úloh. Energii, kterou při nácvik využili k soutěžení mezi sebou, teď všechnu použili ke spolupráci a řešení jim šlo od ruky jedna báseň.

Ke konci časového limitu už byli oba vyčerpaní a nic se jim počítat nechtělo. Naštěstí jim zrovna přišla jednoduchá úloha. Bětka se zasmála: „Ještě na začátku roku bych netušila co s takovou úlohou dělat, teď jsem za ni ráda!“

Úloha 6. (6 bodů): Kostka na obrázku má na každé stěně napsané kladné celé číslo, přičemž čísla na různých stěnách mohou být stejná. Vynásobíme-li čísla napsaná na libovolné dvojici protilehlých stěn, dostaneme vždy stejný výsledek. Jaký je nejmenší možný součet všech čísel na kostce?

„Kdo by to byl řekl, že se tady někdy dostanu?“ pomyslela si Bětka na stupni vítězů. Podařilo se jí a týmu ukořistit druhé místo, na první jim chybělo jen pár bodů. Až teď si opravdu uvědomila, jak moc se za celý rok posunula.

Za pár měsíců se naučila mít ráda vědu, kterou předtím nemohla ani vidět. Potkala tolik chytrých lidí ze školy i mimo ni a s většinou z nich se skamarádila, brali ji dokonce za vlastní.

Kdo ví, co bude za rok? Třeba Bětka objeví kouzlo fyziky, nebo se dá na programování. Až už to bude cokoliv, Bětka se těší na všechno nové, co zažije.

Řešení úloh 5. série posílejte do ***28.5.2018*** *na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 01 Bílovec

Autorská řešení 4. série

Úloha 1.

Spočítejme nejprve délku drátu, který tvoří jeden závit. Pro jednodušší představu mějme válec, který má podstavu s průměrem 4cm a je vysoký 6cm. Na plášti takového válce leží přesně jeden závit naší pružiny. Body dotyku šroubovice s podstavami válce leží na jedné přímce kolmé k oběma podstavám. Vezměme tedy plášť, rozdělme ho podél té přímky a roztáhněme. Vznikl nám obdélník s rozměry 6cm a 4cm a drát pružiny nám tvoří uhlopříčku obdélníku. Délku drátu v jednom závitu tedy zjistíme jednoduše pomocí pythagorovy věty. Pokud délku, která nám vyjde vynásobíme dvěma, dostaneme celkovou délku drátu.

$$d = 2 \cdot \sqrt{6^2 + (4\pi)^2} = 27,85cm$$

Jirka

Úloha 2.

Víme, že šesté nejmenší prvočíslo je třináct, hledáme tedy součet všech sudých čísel od 2 do 260.
Díky aritmetické posloupnosti jej můžeme zapsat ve tvaru:

$$s = (2 + 129) + (4 + 127) + \cdots + 131 + \cdots + (258 - 127) + (260 - 129)$$

Z něj vycházíme a dojdeme k výslednému součinu aritmetického průměru nejmenšího a největšího z daných sudých čísel a počtu všech vypsaných sudých čísel:

$$s = \frac{2 + 260}{2} \cdot 130$$
$$s = 131 \cdot 130$$
$$s = 17030$$

Marta

Úloha 3.

Protože ani jeden nedokáže určit, čí číslo je větší, musí být obě čísla menší než 50 (aby byl součet dvojciferné číslo). Jelikož je Michal schopen určit součet (tedy i Tomovo číslo) poté, co se dozví, že je Tomovo číslo dělitelné 20, je i jeho číslo dělitelné 20, protože taková čísla menší než 50 jsou právě 2 a to 20 a 40. Jejich součet je tedy 60, bez ohledu na to, kdo má které.

Barča

Úloha 4.

Bude nám vznikat útvar připomínající jakýsi zubatý osmistěn (oktaedr), který můžeme rozřezat horizontálně na vrstvy.
Počet krychliček ve všech vrstvách bude počet všech kostiček v tělese, a tím pádem i objemem. Pro zefektivnění počítání si můžeme povšimnout, že v prvním kroku přidáme k počátečnímu útvaru 4 krychle, v druhém kroku přidáme dalších 8, ve třetím dalších 12. … Dostáváme velmi jednoduše výsledek:

$$1 + (1 + 4) + (1 + 4 + 8) + (1 + 4 + 8 + 12) + (1 + 4 + 8 + 12 + 16) +$$
$$+(1 + 4 + 8 + 12) + \cdots + 1 = 1 + 5 + 13 + 25 + 41 + 25 + 13 + 5 + 1 = 129$$

Podíváme-li se na výsledné těleso kolmo ke stěnám krychlí, vždy uvidíme stejný útvar, nejširší vrstvu. Stačí proto spočítat povrch, který uvidíme z jedné strany, a vynásobit ho šesti, tedy počet směrů, ze kterých se můžeme dívat. Povrch výsledného tělesa bude $6 \cdot 41 = 246$.

Tom

Úloha 5.

Pokud do stroje vhodíme částku 444 korun nebo menší, stroj nevyplatí nic. Za částku od 445 do 1444 korun dostaneme jednu tisícikorunu, za částku od 1 445 do 2 444 korun dvě tisícikoruny atd. Kokosácký stroj vyplatil Bětce přibližně 69% vhozené částky, tzn. alespoň jednu tisíci korunu.
Označíme-li počet vhozených korun x a počet vyplacených tisícikorun y, pak platí nerovnost:
$0,685 \cdot x \geq y \cdot 1000 < 0,695 \cdot x \cdot 0,685 \cdot x \geq y \cdot 1000 <$
$< 0,695 \cdot x$, po úpravě $y \cdot 1438,8 < x \leq y \cdot 1459,8$. V případě, že stroj vyplatil jednu tisícikorunu, mohla Bětka vhodit do stroječástku 1439, 1 440, 1 441, 1 442, 1 443 nebo 1 444 korun. V případech, kdy stroj vyplatí více tisícikorun než jednu, je vyplacená částka vždy vyšší než 69% vhozené částky. Bětka mohla vhodit do stroje částku od 1 439 do 1 444 korun.

Ondra

Úloha 6.

Co víme:

- $h = 2,5\text{m} = 25$ dm(výška celé popelnice)
- $a = b = d = 1\text{m} = 10$ dm (délky podstavy kvádrové části popelnice a zároveň průměr víka)
- $S_2 = 50,460$ dm^3 (obsah nevužité části)
- $S = ?$

Co všude zjistíme:

- $V = (1 \cdot \pi \cdot d^3) : 6$(vzorec pro objem koule)
- $V = abc$ (vzorec pro objem kvádru)

Výšku kvádrové části popelnice c spočítáme jako:

$$c = h - \frac{d}{2} = 25 - 5 = 20dm$$

Objem kvádrové části potom:

$$V_k = 10 \cdot 10 \cdot 20 = 2000dm^3$$

Objem víka spočítáme jako polovinu objemu koule o průměru d:

$$V_v = \frac{\frac{1 \cdot \pi \cdot d^3}{6}}{2} = \frac{\frac{1 \cdot \pi \cdot 1^3}{6}}{2} = 261,799dm^3$$

Celkem: $V_c = 2261,799\text{dm}^3$. Pomocí trojčlenky:

$$100\% \ldots 2261,799$$
$$(1\% \ldots 22,617)$$
$$x\% \ldots 50,460$$

Dopočítáme $x = 2,2\%$. V popelnici tak odpadky zabírají $97,8\%$

Eliška

Výsledkové listiny

Tady najdete jen několik nejlepších řešitelů, pro úplné výsledkové listiny se podívejte na naše internetové stránky.

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Milan	Holotňák	8	7	7	6	4	3	35	130
2.	Viktor	Gola	-	2	8	5	5	6	26	110
3.	Martin	Půček	-	-	-	-	-	-	0	72
4.	Mikuláš	Kuchař	-	-	-	-	-	-	0	23

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Lukáš	Pohořelský	8	4	0	5	3	6	26	130
2.	Vilém	Bednařík	8	7	3	6	-	6	30	113
3.	Jana	Dreiseitlová	1	5	8	6	7	6	33	110
4.	Linda	Tomišová	8	2	0	6	5	6	27	105
5.	Jakub	Macíček	-	-	-	-	-	-	0	92
6.	Adam	Jemelka	7	2	8	4	2	6	29	88
7.	Johana	Vaníčková	1	7	0	-	7	6	21	81
8.	Tomáš	Chalas	-	-	-	-	-	-	0	73
9.	Adéla	Nguyenová	-	-	-	-	-	-	0	41
10.	Jan	Holuša	-	-	-	-	-	-	0	31
11.	Jáchym	Hažmuk	-	-	-	-	-	-	0	24
12.	Hoang Minh	Weinert	-	-	-	-	-	-	0	9

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Anna	Hronová	8	6	8	6	7	6	41	157
2.	Adam	Kutálek	8	7	8	6	7	6	42	155
3.	Lukáš	Brezniak	8	6	0	6	7	6	33	133
4.	Simona	Mozgová	-	-	-	-	-	-	0	87
5.	Martin	Kužílek	-	-	-	-	-	-	0	68
6.	Adéla	Houdková	-	-	-	-	-	-	0	57

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
7.	Šimon	Bláha	-	-	-	-	-	-	0	48
8.	Olga	Půčková	-	-	-	-	-	-	0	29
9.	Matěj	Běťák	-	-	-	-	-	-	0	24
10.	Robert	Kudlička	-	-	-	-	-	-	0	22
11.-12.	Vojtěch	Kubala	-	-	-	-	-	-	0	21
	Anna	Kuchařová	-	-	-	-	-	-	0	21
13.	Silvia	Assenza	-	1	-	-	-	-	1	9

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Emma	Deuserová	8	7	8	3	-	-	26	82
2.	Petra	Štolfová	-	6	0	3	7	6	22	78
3.	Kristýna	Stohanzlová	-	-	-	-	-	-	0	60
4.	Hana	Pasková	-	-	-	-	-	-	0	31
5.	Pavel	Štarha	-	-	-	-	-	-	0	28
6.	Věra	Polášková	-	-	-	-	-	-	0	27
7.	Tomáš	Březina	-	-	-	-	-	-	0	18