

KOKOS

30.ročník ★ 1.leták

Milý řešiteli!

Prázdniny utekly jako voda a je pro Tebe nachystán nový ročník KOperníkova KOresponzenčního Semináře – KoKoSu. Jako obvykle Ti přinášíme sadu matematických oříšků doprovázenou napínavým příběhem. Navíc Ti hned v této sérii nabídneme, jako odměnu za Tvou snahu, účast na našich KoKoSových Prázdninách (podrobnosti nalezněš na zadní stránce). Pokud budeš v našem semináři opravdu úspěšný a dosáhneš ve výsledkové listině na medailová místa, dostaneš navíc na konci školního roku pěkné ceny, a to už stojí za to! Chceš poměřit své síly se svými vrstevníky z celé republiky? Směle do toho! Nejdříve Ti ale doporučujeme přečíst si pravidla našeho semináře, kterými se každý správný KoKoSák za každých okolností řídí:

- KoKoS je celonárodní matematická korespondenční soutěž pro žáky 6. – 9. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.
- Ročník je rozdělen do pěti sérií. V každé sérii Ti zašleme leták se zadáním úloh. Ty je vyřešíš a pošleš nám je zpět. My je opravíme, ohodnotíme a zašleme Ti je zase nazpátek spolu se zadáním další série.
- Řešení nám můžeš posílat poštou, nebo přes internet. Poté, co se zaregistruješ do semináře, od nás e-mailem obdržíš přihlašovací údaje ke svému účtu. Pomocí těch se přihlíšíš na **kokos.gmk.cz/login** a jednoduše nám svá řešení pošleš.
- Na řešení máš vždy několik týdnů. Toto je první série, jejíž uzávěrka je **30. října**. Rádi bychom Ti dali více času, ale KOPR spěchá.
- Jednotlivé příklady piš na papíry formátu A4 nebo A5. **Na každý papír piš řešení pouze jednoho příkladu!** Více příkladů na jednom papíru nám přidává práci a vzhledem k počtu řešitelů se takovými řešeními nemůžeme a nebudeme zabývat!

- U každé úlohy připiš **do levého horního rohu** své jméno, příjmení, **číslo série a úlohy** a navíc i adresu k Tobě do školy nebo domů – podle toho, kam si necháváš zasílat opravená řešení.
- U každého příkladu musíš pečlivě vylíčit postup řešení. Uvedeš-li pouze výsledek nebo nezdůvodníš-li dostatečně své závěry, nemusíme Tvé řešení považovat za kompletní a úplné – zbytečně poté ztrácíš body!
- V zadání příkladu vždy nalezněš maximální počet bodů, který za něj můžeš získat. Pokud příklad nedokážeš vyřešit úplně, ale uděláš alespoň nějaký pokrok, přisoudíme Ti odpovídající část bodů. Maximální bodový zisk za jednu sérii je vždy 40 bodů.
- Do našeho semináře se můžeš přihlásit kdykoliv, i v průběhu roku. Také nemusíš nutně odeslat všechny série nebo úlohy (i když poté Tě asi ve výsledkové listině předběhnou usilovnější řešitelé). Vždy ale musíš před prvním odesláním řešení (tedy pokud KoKoS řešíš poprvé) **vyplnit internetovou přihlášku!** Tu najdeš na adrese <http://kokos.gmk.cz/prihlaska>. Pokud už jsi vyplnil přihlášku v minulých ročnících, nemusíš to dělat znovu. Řešeními, která odešleš, aniž by ses řádně přihlásil, se nezabýváme.
- Vyplatí se pravidelně sledovat naše webové stránky <http://kokos.gmk.cz>. Najdeš zde aktuální informace o průběhu soutěže a také diskusní fórum, které můžeš použít, nebudeš-li úloze rozumět apod. Pokud se v zadání některého příkladu objeví chyba, zveřejňujeme opravy právě na těchto stránkách.
- Pokud Vás bude z jedné školy více řešitelů, bylo by pro Vás i pro nás vhodné, abyste svá řešení posílali jednotně prostřednictvím školy, tzn. v jedné obálce. My Vám poté zašleme opravené úlohy zase zpátky v jedné obálce. Toto není závazná podmínka, ale šetříte sobě i nám práci i peníze. Děkujeme!
- Každý ročník (6. – 9.) má svou vlastní výsledkovou listinu, aby nižší ročníky nebyly znevýhodněny.
- Úspěšným řešitelem KoKoSu se stává ten, kdo získá za celý ročník 81 bodů a více. A nebo bude úspěšně řešit tři série – což znamená, že v každé z nich obdrží plné bodové ohodnocení alespoň ve dvou příkladech.

Hodně štěstí a zábavy při řešení Ti přejí Tví organizátoři:

Bára, Jurí, Kika, Tom, Kuba, Magda, Venda, Matěj, Lenka, Zuza, Hanka a Max

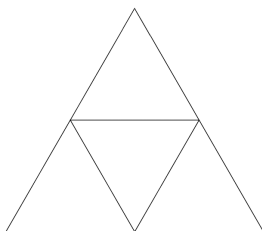
Zadání úloh

V Bílovcí panovala sychravá atmosféra. Zářilo bylo v plném proudu a s ním i nový školní rok. Bětka se jako každé ráno loudala do školy tolik zabraná do svých myšlenek, že si ani nevšimla všudypřítomných plakátů upozorňujících na velkou událost, která její rodné město chystala – výstavu na téma „Nejlepší bílovecké matematické úlohy století“. Všichni obyvatelé už na ni byli natěšení, kromě Bětky, která o matematiku nikdy nejevila zájem. Naopak matematiku neměla vůbec ráda, z části i protože jí nikdy moc nešla. Minulý rok měla co dělat, aby vůbec prošla dál, a to se na jejím vztahu k matematice dost projevilo.

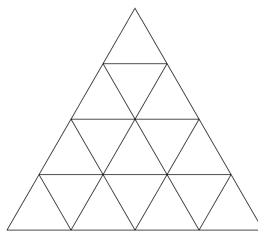
Úloha 1. (6 bodů): Bětka měla v loňském ročníku průměr všech známek 4,15. Z nich byly pouze 4 jedničky, zato právě jedna třetina byly pětky. Kolik známek musela Bětka minimálně dostat?

Úplným opakem Bětky byl však její spolužák Alois, který jí každý den během školy nadšeně povídal o všech příkladech, kterými se v poslední době zabýval. Ani toho dne to nebylo jinak – jen se Bětka objevila ve třídě, Alois už k ní běžel i s cárem papíru.

Úloha 2. (9 bodů): Mějme rovnostranný trojúhelník, který v 1. kroku rozdělíme pomocí středních příček na 4 malé rovnostranné trojúhelníky (viz obr. a). V každém dalším kroku rozdělíme ty nejmenší trojúhelníky na 4 malé rovnostranné trojúhelníky (viz obr. b). Jaký bude počet nejmenších trojúhelníků na obrázku po stém kroku?



(a)



(b)

„Super, Aloisi, ale už jsem ti několikrát říkala, že mě to vůbec nezajímá,“ odvětila bez zájmu Bětka. Alois zklamaně zakroutil hlavou. „Bětko, Bětko... trhá mi srdce, když vidím, jak se hnušíš něčeho tak krásného... pojď se mnou na tu výstavu, a jestli ani po ní nezměníš na matematiku názor, slibuju, že už ti dám pokoj!“ Bětka nad tím popřemýšlela a nakonec souhlasila.

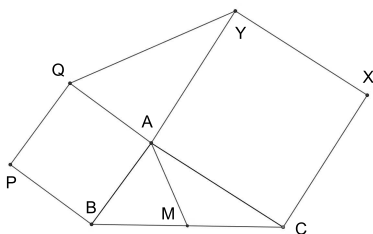
Zbytek školního dne jí utíkal pomalu, většinu času strávila vymýšlením rozmanitých způsobů, jak se zabavit. Mezi nimi jasně zvítězilo házení kostkami.

Úloha 3. (7 bodů): Bětka hodí najednou čtyřmi kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že hodí přesně 14?

Smích ji však rychle přešel, když jí byly kostky ve třetí hodině zabaveny. Celý den pak proseděla v letargii a nepomohly jí ani Aloisovy vtipy na její účet.

Rozveselila se až při odchodu ze školy, jelikož byl pátek a ji čekal víkend plný nicnedělání. To Bětce tolik zvedlo náladu, že byla ochotná si vyslechnout další z Aloisových příkladů.

Úloha 4. (6 bodů): Máme trojúhelník ABC . Označme bod M jako střed strany BC . Dále máme čtverce $ABPQ$ a $ACXY$ vztyčené na stranách trojúhelníku. (Viz.obrázek) Dokažte, že $QY = 2AM$.



Večer se Bětka s Aloisem vypravili na oslavu narozenin jejich kamarádky Květy. Bětka si myslela, že aspoň při takové příležitosti Alois na matematiku zapomene. Nemohla se víc mýlit.

Podával se narozeninový dort a Květa žertovně pronesla: „Hlavně to snězte všechno, nechci vidět žádné zbytky!“ Na to se Alois zamyslel: „Mmm, zbytky...“

Úloha 5. (6 bodů): Jaké zbytky dává výraz $\frac{(p^4 - 5p^2 + 4)}{720}$ pro prvočísla $p > 5$?

Bětka předpokládala, že v tu chvíli všichni kolem věnují Aloisovi zmatený pohled a párty bude pokračovat, to byl ale jen další z jejich omylů. Ukázalo se, že zbytek osazenstva byl také matematickými příznivci a do pěti minut se večírek zvrhl v něco, co připomínalo matematickou soutěž, jenom s dortem navíc. Tak se Bětka po chvíli rozloučila a sklesle zamířila domů.

Večer, když už ležela v posteli si pak přečetla pohádku, aby celý den aspoň pěkně zakončila.

Úloha 6. (8 bodů): V nejvyšším patře věže byla vězněna královská rodina. Může uniknout, protože u okna je kladka s dvěma koši a lanem dosahujícím až na zem. Má to ale jeden háček: do koše se vejdou buď dvě osoby, nebo osoba a truhlice. Král váží 90 kg, královna 50 kg, princ 40 kg a je tu ještě třicetikilová truhlice. Lano spolehlivě unese zátěž, kterou potřebujeme přepravit, ale pohyb koše s člověkem dolů je bezpečný jen tehdy, když klesající koš má nejvýše o deset kg větší zátěž než koš druhý. Koš s truhlicí může padat volným pádem. Navrhněte způsob přepravy, který bude bezpečný pro všechny tři vězně a dovolí jim uniknout.

Už se jí klížily oči, když si vzpomněla, že další den se koná ona matematická výstava a ona slíbila Aloisi, že ho doprovodí. . . Ale co, řekla si, třeba má Alois pravdu a já potom začnu mít matiku ráda. . . od srdce se tomu zasmála a usnula.