KOKOS

29. ročník ⋆ 3. leták

Jarní soustředění

Milý řešiteli, abychom Ti ještě více přiblížili náš korespondenční seminář KoKoS, a zároveň Tě odměnili za Tvou snahu, připravujeme pro Tebe další jarní soustředění!

Jedná se o 6 dnů plných zábavy, her, a také přednášek na témata matematická, fyzikální či chemická. Ve dnech 14. – 19. března na tebe čeká nabitý program a spousta nových přátel s podobnými zájmy. Soustředění se již tradičně koná v budově Domova mládeže při Gymnáziu Mikuláše Koperníka v Bílovci, a to pod pedagogickým dohledem za organizace studentů gymnázia.

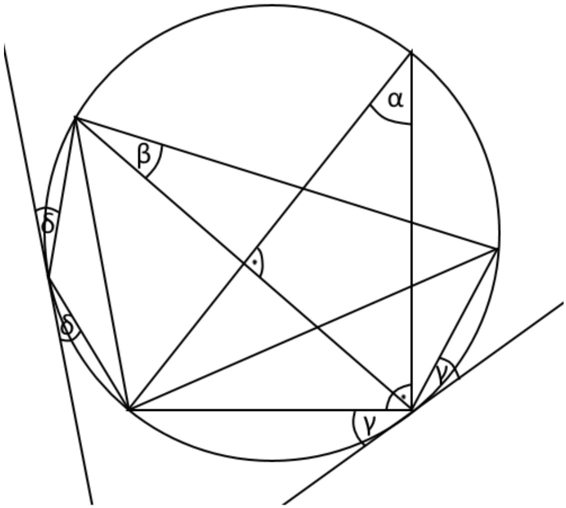
Cena, pro letošek stanovená na 500 Kč, zahrnuje veškerý program včetně stravy a ubytování. Pokud máš jakékoliv otázky, neváhej se obrátit na náš email *gmkkokos@seznam.cz*, kde Ti rádi všechno vysvětlíme. Pokud je Ti vše jasné, tak neváhej a vyplň naši internetovou přihlášku, kterou najdeš na našich webových stránkách *kokos.gmk.cz*. Poté, co ji obdržíme, Ti do několika dnů zašleme email s podrobnými informacemi. Těšíme se na Tebe!

Ještě na úvod podotýkáme, že úlohy v této sérii jsou tematicky zaměřeny na obvodové a středové úhly a tětivové čtyřúhelníky. Vůbec nevadí, pokud tyto pojmy ještě neznáš – vše potřebné je Ti vysvětleno v PiRoHu na konci série. Tak už na nic nečekej a dej se do řešení!

Organizátoři

Zadání úloh

Nastala chvíle ticha. Místní se na pětičlenou skupinku dívali jako na bohy, ovšem ti si mezi sebou jen vyměňovali zmatené pohledy. Nakonec odvážně prolomil ticho Max. „Ehm, promiňte, ale…co?“ V tu ránu se na něj všichni podzemšťané otočili, skoro jako by byli rozzlobení, že pokazil tak obřadní chvíli.



Stařec se však usmál a pustil se do vysvětlování. „Nikdo neví, jak Zdroj přesně funguje, ale jen díky němu jsme tady v podzemí schopni přežít. Podle legendy ale existuje těchto zdrojů několik a část z nich je uložena na jistém místě ještě hlouběji v podzemí.

Říká se, že se odtamtud napájí zemské jádro.Kdyby ovšem některé z těch Zdrojů zmizely, hrozilo by riziko, že jádro vyhasne a veškerý život přestane existovat… Podle legendy bude jeden ze Zdrojů zničen, ale objeví se skupina pozemšťanů, kteří budou vyvoleni, aby náš Zdroj do podzemí donesli a zachránili tak svět. Podle všeho to můžete udělat jen vy…a budete si muset pospíšit, jelikož jsme už zaregistrovali mnoho znamení, která o zničení Zdroje svědčí…“

„Ehm, promiňte, ale…co?“ Ta informace byla pro kamarády těžce zpracovatelná. Nikomu se do toho moc nechtělo, ale podzemšťané je ubezpečili, že dokud jim nevyhoví, zpět na povrch se nedostanou. Po dlouhé hádce nakonec přikývli. „A řeknete nám aspoň, kam máme jít?“ zeptal se rozmrzele Tomáš.

„Ale ano, samozřejmě, veškeré informace najdete tady,“ odvětil stařec a podal mu ošumělý notes.

„Tak to se podívejme…hm…vydejte se pod následujícím azimutem…počkat, cože? No neříkejte mi, že to je další příklad!“

Úloha 1. (7 Bodů): Vypočítejte úhel α, pokud víte, že $\delta = 20°$ a $\gamma = 32°$.

„Mohli nám to napsat rovnou…tohle začíná vypadat jako nějaká olympiáda,“ zakroutila hlavou Bára. A tak se vydali na cestu. Podzemšťané jim s sebou na cestu zabalili všechno potřebné včetně Zdroje a možná až příliš vesele jim zamávali na rozloučenou. Cesta podzemními tunely byla zdlouhavá a mezi kamarády zpočátku panovala ponurá nálada, ale po nějakém čase je to přestalo bavit a začali se normálně bavit a Jirka je začal nutit počítat úlohu, kterou vymyslel na zlepšení atmosféry.

Úloha 2. (5 Bodů): Čtyřúhelníku $ABCD$ je opsána kružnice, přičemž její střed S leží na úhlopříčce AC. Velikosti úhlů ASB, ACD jsou popořadě $120°$, $40°$. Vypočítejte úhel BAD.

Všichni se na počítání tolik soustředili, že špatně odbočili a skončili ve slepé chodbě a trvalo jim dvě hodiny, než se vrátili na cestu, o které předpokládali, že je dovede na správné místo. Netrvalo ale dlouho a narazili na další překážku – chodba, kterou šli, také končila slepě. Na zdi před nimi byla však vytesaná slova.

Úloha 3. (9 Bodů): V tětivovém čtyřúhelníku $KLMN$ má úhel KLN stejnou velikost jako LMK. Jak velká je strana KN, jestliže $|KL| = 5$?

Na zemi pod nápisem ležely do řady vyrovnané kameny s vyrytými čísly. Kamarádům hned došlo, že je čeká další počítání. Vyřešili úlohu a zkusili na kámen s příslušným výsledkem stoupnout. K jejich radosti se stěna před nimi rozestoupila a oni mohli pokračovat v cestě. Šli už dlouhé hodiny a začala na ně doléhat únava, když tu najednou se tunel před nimi rozevřel a objevila se malá jeskyňka. Uprostřed ní stála chatrč.

Úloha 4. (6 Bodů): Domeček je tvořen čtvercem $ABCD$ a rovnoramenným trojúhelníkem CED (o základně CD). Bod C, střed čtverce $ABCD$, střed strany CD a střed strany CE leží na jedné kružnici. Vypočítejte úhly v trojúhelníku CED.

„Tak to je…podezřele příhodné,“ prohodila Kika, ostatní ale jen pokrčili rameny a šli si dovnitř lehnout. Rozhodli se ale, že by měl někdo držet hlídku, protože se báli, co by na ně mohlo ve tmě číhat. Jirka držel hlídku jako první a tu příležitost využil, aby vymyslel další příklad.

Úloha 5. (5 bodů): Mějme trojúhelník ABC s vnitřními úhly $\alpha = 36°$ $\beta = 72°$ $\gamma = 72°$. Průsečík osy úhlu γ a strany AB ozačme jako E a dále zvolme na straně AC bod D tak, aby $|BD| = |BC|$. Dokažte, že body E, B, C a D leží na jedné kružnici.

O pár hodin později mohli znovu pokračovat v cestě. Na další hádanku narazili, když se před nimi objevilo podzemní jezero, přes které vedl padací most. Nikde ale nebylo nic, čím by ho měli spustit. Vedle něj ovšem stála kamenná deska, která na sobě stejně jako předtím měla vytesanou hádanku a pod ní ležely kameny s čísly. Tak se skupinka pustila do čtení.

Úloha 6. (8 Bodů): Mějme trojúhelník ABC a jemu vepsanou kružnici $k(S, r)$. Označme si body dotyku kružnice vepsané se stranami AC a BC pořadě jako D a E. Body M a N leží pořadě na úsečkách DC a EC, tak že $|DM| : |MC| = 1 : 2$ a $|EN| : |NC| = 1 : 2$. O trojúhelníku dále víme, že: $|AB| = |AM = |MN| = 9$ cm. Určete délky všech stran troúheníku ABC, jestliže je úsečka MN tečnou kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

„Tohle je mi nějaké povědomé,“ zamyslel se Max, „Báro, půjč mi tu svoji sbírku.“ Bára mu knížku podala a on jí chvilku listoval, než se u jednoho z příkladů zastavil. „Aha! Já jsem věděl, že už jsem ten příklad někde viděl! V té sbírce je úplně stejný! Tak kdepak jsou tady výsledky…“ S počítáním se tedy ani nenamáhali a řídili se podle výsledků ze sbírky. A skutečně – most přes řeku se spustil a oni mohli pokračovat. A tak šli dál a cestou přemýšleli, jestli to celé vlastně není jen nějaký špatný vtip.

*Řešení úloh 3. série posílejte do **27.3.2017** na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 11 Bílovec

Autorská řešení 2. série

Úloha 1.

Na něco hraje $700 - 250 = 450$ lidí. Celkem hraje na klavír 100 lidí, z toho na klavír i flétnu 50, na klavír i kytaru stejný počet jako jen na klavír tzn. $(100 - 50) : 2 = 25$. Celkem hraje na kytaru 275 lidí, z toho na kytaru i flétnu hraje $2 \cdot 50 = 100$ lidí, na kytaru i klavír hraje 25 lidí, pouze na kytaru hraje 275 - 100 - 25 = 150 lidí.

Počet hráčů pouze na flétnu $= 450 - (50 + 25 + 100 + 25 + 150) = 100$.
Pouze na fltnu hraje 100 lidí.

Zuzka

Úloha 2.

Poměr vzdáleností, které Damián a Kuba uplavali první den, je v poměru 3 : 5. Znamená to, že Kuba uplaval $3x$ metrů a Damián $5x$ metrů. Potom druhý den Kuba uplaval $(3x - 150)$ metrů, David $(5x + 80)$ metrů. Jsou-li tyto vzdálenosti v poměru 4 : 7, musi platit tato rovnice:

$$\begin{aligned} 7 \cdot (3x - 150) &= 4 \cdot (5x + 80) \\ x &= 1370 \\ 3 \cdot 1370 &= 4110\ Kuba \\ 5 \cdot 1370 &= 6850\ David \end{aligned}$$

David uplaval 6850 metru a Kuba 4110 metru.

Hanka

Úloha 3.

Lichoběžník $ABFE$ je pravidelný, proto mu můžeme opsat kružnici. Protože obvodový úhel je polovinou středového, tak velikost úhlu EBA je polovina velikosti úhlu ECA, to samé platí pro úhly BAF a BCF. Takže velikost úhlů EBA a BAF je 30°. Dopočítáme velikost posledního úhlu v trojúhelníku ABP, který je shodný s hledaným úhlem. 180° - 2 · 30° = 120°.

Hledaný úhel EPF bude mít velikost 120°

Jiří

Úloha 4.

První skupina cestu ujela za 32 minut a dorazila tedy v 7:42. Druhé skupině cesta trvala jen 12 minut. Aby na místo dorazili společně, musela druhá skupina vyjet o 20 min později, tedy v 7:30.

Skupina B vyjíždí v 7:30.

Magda

Úloha 5.

Nejdřív se podíváme na horní podstavu, která má obsah 221 cm^2. Tento obsah nám musí vzniknout vynásobením délky a šířky. Uděláme si prvočíselný rozklad 221 a zjistíme, že $221 = 17 \cdot 13$ (zatím nevíme, co je délka a co šířka).

Po odebrání 2 vrchních vrstev má boční stěna obsah 117 cm^2. Zase si uděláme prvočíselný rozklad a zjistíme, že $117 = 13 \cdot 3 \cdot$. Takže původní šířka je 13 cm a délka 17 cm a výšku zjistíme přičtením 2 ke vzniklé výšce (dvě horní vrstvy jsme odebrali), takže původní výška má velikost $2 + 9 = 11$ cm. Pak odebereme z přední strany 459 kostiček. Toto číslo muselo vzniknout vynásobením délky, vzniklé výšky a části šířky. Protože $459 = 17 \cdot 9 \cdot 3$, tak odebraná část šířky je 3 cm. Abychom vypočítali vzniklé rozměry, tak od původní šířky musíme odečíst 3 cm. Vyjde nám vzniklá šířka 10 cm.

Původní rozměry byly 17·13·11 cm a vzniklé jsou 17·10·9 cm.

Kuba

Úloha 6.

Krychle má 8 vrcholů $\rightarrow 8 \cdot \frac{1}{8}$ koule = 1 koule. Objem koule se vypočítá $\frac{4}{3}\pi \cdot r^3$,tzn. pro r = 3 cm bude objem přibližně 113 cm^3. Objem krychle o straně a = 6 cm se rovná $a^3 = 216$ cm^3. Objem volného prostoru vypočteme rozdílem objemu krychle a koule: V = 216 − 113 = 103 cm^3.

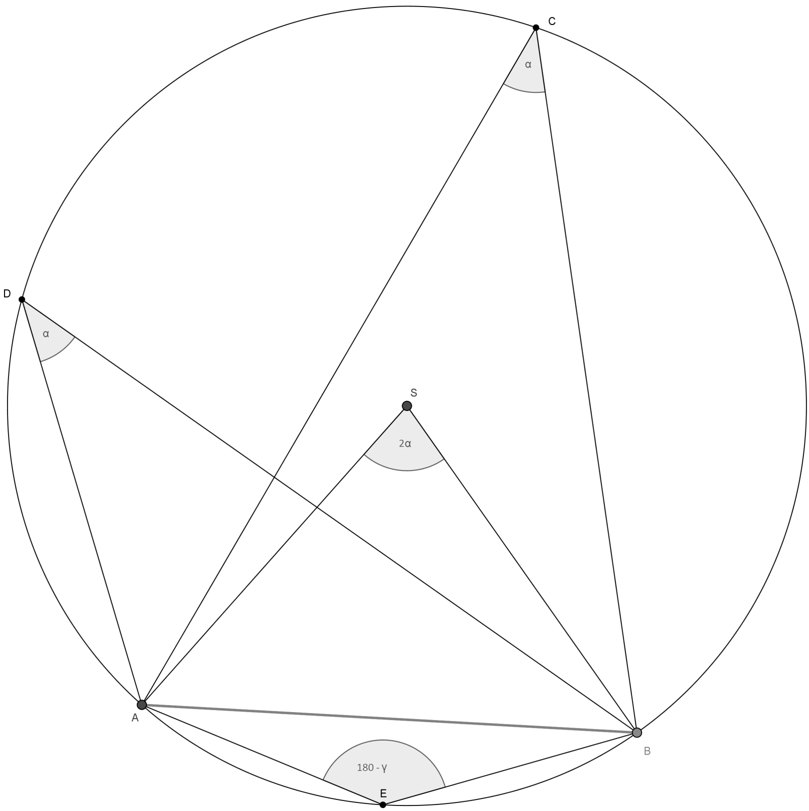
Objem volného prostoru uvnitř je 103 cm^3.

Kika

Středové a obvodové úhly

Středový úhel

Mějme kružnici $k(S, r)$ a na ní dva body, označme si je jako A a B ($A \neq B$). Úhel ASB nazýváme středovým úhlem nad obloukem AB.

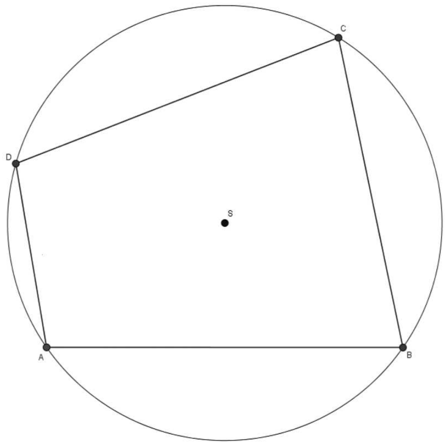


Obvodový úhel

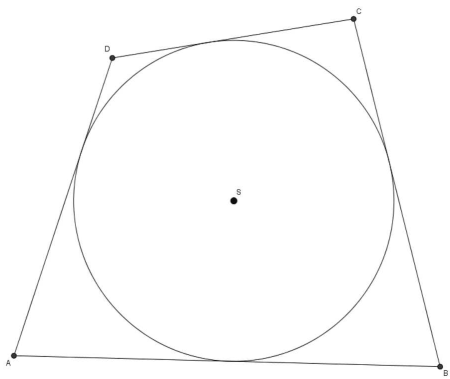
Mějme kružnici $k(S, r)$ a na ní dva body, označme si je jako A a B ($A \neq B$). Zvolme si na kružnici k dva body C a D ($A \neq B \neq C \neq D$). Jako obvodové úhly označujeme úhly ACB a ADC.

Věta o obvodových úhlech nám říká, že pokud body C a D leží na stejném oblouku kružnice k, tak se velikosti obvodových úhlů rovnají. Pokud body leží na různých obloucích kružnice, tak je součet těchto obvodových úhlů roven 180°. Dále platí, že středový úhel je vždy dvojnásobek obvodového úhlu (viz obrázek).

Tětivový a tečnový čtyřúhelník



Tětivový čtyřúhelník



Tečnový čtyřúhelník

Čtyřúhelník, kterému lze opsat kružnici, označujeme jako **tětivový čtyřúhelník**. Součet velikosti úhlů u protilehlých vrcholů je vždy roven 180°.

Čtyřúhelník, kterému lze vepsat kružnici, označujeme jako tečnový čtyřúhelník. Pro jeho strany platí: $a + c = b + d$.

Výsledkové listiny

Tady najdete výsledkovou listinu pro každou kategrorii.

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Natálie	Jindrová	3	1	3	6	-	-	13	13
2.	Hoang Minh	Weinert	-	-	3	-	-	-	3	11
3.	Natálie	Tremlová	-	-	-	-	-	-	0	6

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Anna	Hronová	7	6	9	6	8	6	42	84
2.	Kateřina Julie	Sedláčková	7	6	3	6	8	6	36	60
3.	Adéla	Houdková	4	-	3	6	8	6	27	53
4.	Zuzana	Krčmáriková	-	-	3	6	-	5	14	36
5.	Dalimil	Šťastný	-	-	-	-	-	-	0	24
6.	Vojtěch	Kubala	-	-	-	-	-	-	0	22
7.	Silvia	Assenza	7	-	-	-	-	-	7	18
8.	Eduard	Grňa	-	-	-	-	-	-	0	16
9.	Eliška	Drongová	-	-	-	-	-	-	0	11

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Hana	Rusinová	7	6	3	6	8	6	36	71
2.	Martin	Mlečka	6	1	3	6	8	6	30	68
3.	Vojtěch	Zeman	6	5	-	6	8	6	31	65
4.	Monika	Anderlová	7	-	-	6	6	6	25	35
5.	Adéla	Anderlová	7	-	-	6	6	6	25	34
6.	Hana	Pasková	-	-	-	-	-	-	0	27
7.	Lucie	Chromečková	-	-	-	-	-	-	0	26
8.	Nikola	Razakowská	-	-	-	-	-	-	0	10

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Natálie	Maleňáková	7	6	9	6	7	6	41	82
2.	David	Kamenský	7	6	9	6	8	4	40	81
3.	Michaela	Peterková	3	6	9	6	8	6	38	80
4.	Jana	Čákorová	7	6	9	6	8	6	42	79
5.-6.	Veronika	Krčmáriková	7	6	4	6	8	6	37	72
	Anna	Lorencová	7	6	3	6	8	6	36	72
7.	Zuzana	Lukovicsová	6	6	3	6	8	6	35	66
8.	Dominik	Musial	7	0	1	6	6	4	24	65
9.	Michal	Staś	7	6	7	4	-	4	28	62
10.	Tereza	Halámková	-	-	-	-	-	-	0	41