KOKOS

29.ročník ⋆ 2.leták

Milý řešiteli!

Taky se doma nudíš za chladných zimních večerů? Nezoufej, přinášíme ti totiž další sérii KoKoSu. Čeká na tebe pokračování příběhu a další sada matematických úloh. Tak už na nic nečekej a dej se do řešení.

Zadání úloh

Podzemní město se nacházelo v rozlehlé jeskyni, jejíž stěny byly protkány modře svítícími žilkami. Pětice kamarádů oněměle následovala dva strážné, kteří je vedli směrem k městu. Strážní se chopili role průvodců a nadšeně skupince o svém domově vyprávěli, i když odpovědím na otázky jak město vůbec funguje v podzemí se pořád vyhýbali. Místo toho se kamarádů ptali, jak funguje život na povrchu. Takový rozhovor jim celou cestu do města zkrátil. „No a víte, my jsme teď nedávno dělali takový průzkum, a to vám bylo hrozně zajímavé,“ rozpovídal se Jirka, „a já jsem z toho udělal takový pěkný příklad. Schválně, jestli ho vyřešíte.“

Úloha 1. (7 bodů): V Bílovci byl udělán průzkum. Ptali se náhodných kolemjdoucích, kolik lidí z nich hraje na nějaký hudební nástroj. Celkem bylo osloveno 700 lidí. 250 z nich uvedlo, že nehrají na nic. Dále byl klavír, kytara a flétna. Žádný z dotazovaných nehraje na jiný nástroj než na klavír, kytaru nebo flétnu. 100 z oslovených lidí uvedlo, že hraje na klavír. Na 3 nástroje nehraje nikdo. Na kytaru a zároveň i na flétnu hraje dvakrát více lidí než na klavír a zároveň na flétnu. Na klavír a zároveň na flétnu hraje 50 lidí. Na klavír a zároveň na kytaru hraje stejný počet lidí jako pouze na klavír. Na kytaru hraje celkem 275 lidí. Kolik lidí hraje pouze na flétnu?

Strážní přemýšleli a hádali se o výsledku, a než příklad dořešili, ocitli se v samém centru městečka, ve kterém jako by se čas zastavil před nejméně třemi sty lety. Na maličkém náměstí bylo rušno, všude kolem byly rozestavěné stánky s podivně vypadající zeleninou a ovocem, keramikou a dalšími výrobky, kolem kterých pobíhali obyvatelé města. Kamarádům připadali o něco menší a bledší než byli oni sami, ale nepochybně to byli lidé. Několik z nich si skupinky všimlo a začalo po nich zvědavě pokukovat. Strážní mírně znervózněli a vedli skupinku dál. „Moc pěkný příklad, chlapče,“ řekl jeden ze strážných, „ale na nás byl moc jednoduchý. To já ti teď dám příklad ze života tady od nás, tak se ukaž.“

Úloha 2. (6 bodů): Kuba a Damián šli plavat v podzemním jezeře. Vzdálenosti, které uplavali byly v poměru 3:5, Damián uplaval více. Další den šli znovu plavat, tentokrát Kuba uplaval o 150 metrů méně a Damián o 80 metrů více než předchozí den a poměr vzdálenosti byl 4:7. Kolik metrů uplaval Damián a Kuba první den?

Jirka příklad rychle vypočítal, čímž na strážné udělal dojem. Na další tlachání už ale čas nebyl, protože došli do cíle. Před nimi stála dvoupatrová budova s vývěsním štítem, na kterém stálo „Městská rada“. Celá skupina se přesunula dovnitř. Tam na ně už čekala celá skupina váženě vyhlížejících podzemšťanů, kteří si je jen podezřívavě přeměřili a na to si začali naléhavě šeptat. Jeden ze strážných kamarádům řekl, že mají s druhým strážným chvilku počkat, připojil se k podzemským a společně odešli. Jenže chvilka se zvrtla v hodiny a kamarádi už se začali nudit. A tehdy se už podruhé ukázalo, jaké štěstí bylo, že si s sebou Bára vzala sbírku příkladů – a tak si našli jeden zajímavý a pustili se do řešení.

Úloha 3. (9 bodů): Mějme rovnoramenný trojúhelník ABC. Sestrojme bod F tak, aby trojúhelník BCF byl rovnostranný a délka úsečky AF byla větší než délka úsečky BF. Dále sestrojme bod E tak, aby trojúhelník ACE byl rovnostranný a délka úsečky EB byla větší než délka úsečky AE. Označme si průsečík úseček EB a AF jako bod P. Jaká je velikost úhlu EPF?

Sotva příklad vyřešili, do místnosti se vrátila skupina váženě vyhlížejících podzemšťanů, z nichž ten nejváženěji vyhlížející přešel až ke kamarádům a spustil: „Omlouváme se za způsobené nepříjemnosti, ale potřebovali jsme se o něčem ujistit. Víme, že teď nejspíš nechápete, kde to jste, a já bohužel nemám čas vám to vysvětlovat, místo toho mám ale pro vás prosbu. Abychom vám mohli prozradit více, potřebujeme, abyste se dostali na jedno tajné místo, kde si ověříme pár věcí o vás.“ „Cože? Jak ověříte? A proč bychom s vámi vůbec měli někam chodit? Jak vám můžeme věřit, že nám nic neuděláte?“ naštvala se Kika. Podzemšťan pokrčil rameny, „nemůžete. Ale předpokládám, že byste se rádi dostali zpátky, a to bez urážky sami nezvládnete.“ Kamarádi se po sobě ohromeně podívali. Nechtěli si vyhrožování nechat líbit, ale nakonec se rozhodli spolupracovat. „Dobrá, tady Bernard vás dovede až na místo, kde se setkáme. Dnes už je ale pozdě, necháme vám připravit postele a jídlo a vyrazíte zítra ráno.“ S tím se s nimi rozloučil a odešel. Druhého rána už na ně čekal strážný Bernard a vydali se na cestu.

Úloha 4. (6 bodů): Dvě skupiny vycházející z téhož bodu se chtějí sejít na místě vzdáleném 8 km. Skupina A vyjíždí v 7:10 rychlostí 15 km/h. V kolik hodin vyjíždí skupina B rychlostí 40 km/h, jestliže dorazí na místo setkání společně?

Zanedlouho stáli na samém okraji města před napůl rozpadlou chatrčí. Vedoucí podzemšťan kamarádům pokynul, aby vešli dovnitř. Před nimi se ukázala malá místnost páchnoucí zatuchlinou. U stolu uprostřed místnosti seděl shrbený muž, který si hrál s kostkami. Zadíval se na kamarády a pokynul jim, aby se posadili k němu. „Čekal jsem na vás. Toto je poslední úkol, který musíte splnit, abychom si byli jisti, že jste oni…ano…ale nebudu předbíhat. Prosím, tady je váš test.“

Úloha 5. (8 bodů): Na stole leží předmět ve tvaru kvádru, který je složený z malých kostiček. Horní stěna kvádru má povrch 221 cm^2. Následně odebereme 2 vrchní vrstvy a vzniklá boční stěna má obsah 117 cm^2, potom z přední řady odebereme 459 kostiček. Jaký je rozměr původního a vzniklého kvádru, pokud 1 kostička, ze které je kvádr složen, má hranu o délce 1 cm?

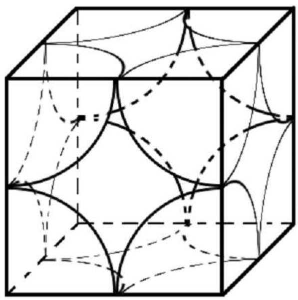
„Velmi dobře," pokýval stařec uznale hlavou na řešení kamarádů a s námahou vstal. „Takže jsou to opravdu oni?" zeptal se jeden z podzemšťanů. Stařec se usmál. „Není o tom pochyb. Teď mě prosím všichni následujte." zamířil ke dveřím s několika zámky. Chvíli mu trvalo, než po kapsách našel všechny klíče, ale nakonec se mu to podařilo a odkryl strmé schodiště, které vedlo do maličkého sklepení. To jako by zářilo. Celý prostor byl prázdný, ale uprostřed něj stál podstavec, na kterém ležela krychle vyzařující stejné modré světlo jako zbytek jeskyně obklopující město.

Úloha 6. (6 bodů): Je dána krychle, uvnitř které se nachází stejné 1/8 koule se středy v každém z vrcholů krychle a poloměry 3 cm. Určete objem prostoru uvnitř krychle, který tyto 1/8 koulí nevyplňují.

„Toto je Zdroj – jediná věc, díky které naše město žije. Je to magický předmět, který město zásobuje světlem a energií a který je zde chráněn po dlouhá staletí, aby jednoho dne splnil svůj úkol – zachránil svět. Dlouho jsme čekali na hrdiny z věštby, kteří se postarají, aby tento úkol splnil. A oni se konečně objevili!"

Řešení
úloh 2. série posílejte do ***9.1.2016*** *na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 01 Bílovec



Autorská řešení 1. série

Úloha 1.

Nejdříve si vypočítáme, kdy potká Max Barču. Dráhu Barči si označíme S_{B1} a dráhu Maxe S. Pro dráhu platí obecně vztah $s = v \cdot t$. Rychlost u Barči označme $v_B = 60$ km/h a čas u Barči t_1. Rychlost u Maxe označme $v_M = 120$km/h a čas $t_M = t1 - \frac{1}{2}$, protože vyjel o půl hodiny později. Jelikož Max dojíždí Báru, tak dráha, po které se setkají, je stejná.

$$S_{B1} = S_{M1}$$
$$v_B \cdot t_1 = v_M \cdot (t_1 - \tfrac{1}{2})$$
$$60t_1 = 120t_1 – 60$$
$$60t_1 = 60$$
$$t_1 = 1\text{hod}$$

Teď vypočtěme, kdy potká Barču Max, vzdálenost bude v tomto případě 120km. Tuto situaci vypočítáme podle vztahu $s = v \cdot t$

$$s = v_B \cdot t_2 + v_J \cdot (t_2 - \tfrac{1}{4})$$
$$120 = 60t_2 + 90t_2 - \tfrac{90}{4}$$
$$120 = 150t_2 – 22,5$$
$$142,5 = 150t_2$$
$$60t_2 = 57$$
$$t_2 = 57/60\text{hod} = 57\text{min}$$

Teď sečteme časy t_1 + 8:00 = 1:00 + 8:00 = 9:00 a pak časy
t_2 + 8:00 = 0:57 + 8:00 = 8: 57 a to je určitě méně než 9:00. Dříve se s Barčou potká Jirka a to v 8:57.

Kuba

Úloha 2.

Výraz si musíme nejdříve upravit:

$$3[b^2 - (2bc - 7abc - 3ac - ab) - 4a \cdot (-\frac{1}{4}b + bc - \frac{1}{4}a) + \frac{1}{3}c(12b - 3a + 3c - 6ab)] \geq 147$$

Po roznásobení a odečtení vznikne:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac + abc \geq 49$$

Což se rovná:

$$(a + b + c)^2 + abc \geq 49$$

Součet závorky je roven sedmi, tudíž můžeme dosadit:

$$7^2 + abc \geq 49$$
$$49 + abc \geq 49$$
$$abc \geq 0$$

Protože $a, b, c,$ jsou kladná čísla, jejich součin bude vždy kladný, tudíž nerovnice platí.

Jirka

Úloha 3.
Jirka má červené tričko (zelené – Bára, oranžové – Kika, nemá modré ani žluté). Proto sedí po Maxově pravici. Tomáš nemá modré tričko, proto má žluté a modré zbyde na Maxe. Max tedy pije vodu a sedí po Bářině pravici. Tomáš pije pivo a sedí po Bářině levici (Bára tedy pije džus), protože Jirka sedí vedle Maxe a Kika pije šťávu. Nakonec zjistíme, že Jirka pije víno.

Berča

Úloha 4.
Lze k řešení přistoupit postupným počítáním tvarů a následným sčítáním obsahů těchto tvarů při znalosti, že čtverec má obsah 4 m^2 (a^2, a=2m)

Čtverce	Obsah:
Hlavní čtverec (1)	4 m^2
Čtvrtiny čtverce (4)	4 m^2
Čtverec uprostřed (1)	0,5 m^2
Součet	8,5 m^2

Trojúhelníky	Obsah:
Trojúhelník 1/2 čtverce (4)	8 m^2
Trojúhelník 1/4 čtverce (5)	5 m^2
Trojúhelník 1/8 čtverce (12)	6 m^2
Trojúhelník 1/16 čtverce (8)	2 m^2
Součet	21 m^2

Obsah všech čtverců a trojúhelníku je 29,5 m^2.

Max

Úloha 5.

Úsečka AG je tělesovou úhlopříčkou kvádru a tím je také stranou trojúhelníku ACG s pravým úhlem u vrcholu C. Strana AG je tedy přeponou a strany AC a CG odvěsnami. Délku strany pravoúhlého trojúhelníku lze spočítat pomocí Pythagorovy věty jako: $|AG| = \sqrt{|AC|^2 + |CG|^2}$ Víme že $|CG|$= 2 cm, délku strany AC neznáme, ale víme, že je to úhlopříčka čtverce $ABCD$ o straně 6 cm. Takže délku úsečky AC můžeme spočítat znovu pomocí Pythagorovy věty jako přeponu pravoúhlého trojúhelníku o délce odvěsen 6 cm.
$|AC| = \sqrt{6^2 + 6^2}$
$|AC| = \sqrt{72}$
Pokud známe obě odvěsny, můžeme dosadit: $|AG| = \sqrt{72 + 4}$ $|AG| = \sqrt{76} = 8,72$
Úsečka AG je dlouhá 8,72 cm.

Kika

Úloha 6.

Protože je trojúhelník ABC pravoúhlý, leží body A, B, C na kružnici s průměrem AB (Thaletova kružnice). Těžnice z bodu C spojuje bod C (bod na kružnici) a střed strany AB (střed kružnice), a proto je těžnice poloměrem kružnice. Obsah půlkruhu se obecně vypočte jako $S = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$, po nahrazení poloměru za délku těžnice a bude obsah roven $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot a^2$.

Barča

Výsledkové listiny

Tady najdete výsledkovou listinu řešitelů podle ročníků.

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Anna	Hronová	6	9	7	6	6	8	42	42
2.	Kateřina Julie	Sedláčková	5	-	7	6	6	-	24	24
3.	Natálie	Tremlová	-	-	6	-	-	-	6	6

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Adéla	Houdková	4	-	4	4	6	8	26	26
2.	Dalimil	Šťastný	5	4	5	5	5	-	24	24
3.-4.	Zuzana	Krčmáriková	-	4	7	5	6	-	22	22
	Vojtěch	Kubala	4	-	-	4	6	8	22	22
5.	Eduard	Grňa	4	-	5	-	6	1	16	16
6.-7.	Silvia	Assenza	4	-	7	-	-	-	11	11
	Eliška	Drongová	4	-	7	-	0	-	11	11

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Martin	Mlečka	4	9	7	4	6	8	38	38
2.	Hana	Rusinová	6	4	7	4	6	8	35	35
3.	Vojtěch	Zeman	4	9	5	2	6	8	34	34
4.	Hana	Pasková	5	3	7	3	4	5	27	27
5.	Lucie	Chromečková	4	4	7	3	6	2	26	26
6.-7.	Monika	Anderlová	6	-	4	0	-	-	10	10
	Nikola	Razakowská	-	-	7	3	-	-	10	10
8.	Adéla	Anderlová	6	-	3	0	-	-	9	9

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Michaela	Peterková	6	9	7	6	6	8	42	42
2.-5.	Tereza	Halámková	6	9	7	5	6	8	41	41
	David	Kamenský	6	9	7	5	6	8	41	41
	Natálie	Maleňáková	6	9	6	6	6	8	41	41
	Dominik	Musial	6	9	7	6	6	7	41	41
6.	Jana	Čákorová	6	4	7	6	6	8	37	37
7.	Anna	Lorencová	6	6	6	6	6	6	36	36
8.	Veronika	Krčmáriková	5	4	6	6	6	8	35	35
9.	Michal	Staś	5	4	7	5	5	8	34	34
10.	Zuzana	Lukovicsová	6	-	6	6	6	7	31	31