KOKOS

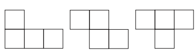
23.ročník ⋆ **2.leták**

Léto nadobro odešlo, listí na stromech ubývá, den je čím dál kratší. Ty však nemusíš zoufat. Pro dlouhé a studené podzimní večery tu pro tebe máme druhou sérii, která v sobě skrývá malé překvapení. Ale to uvidíš, až se propočítáš až na konec. Přejeme Ti dobrou náladu v podzimních dnech a těšíme se na Tvé řešení.

Zadání úloh

V předchozí sérii jsme se pustili do líčení strastiplného osudu obchodního cestujícího Billyho, který se jakýmsi nedopatřením ocitnul ve vesnici Willy. Z názvu by se mohlo zdát, že je to normální ves, ale opak byl pravdou. Nejen, že se zde po obloze prohánějí dvě slunce, ulice tvoří spletitá trojrozměrná bludiště, ale dokonce i místní obyvatelé vykazují jisté anomálie. Doposud měl Billy tu čest seznámit se s malinkým zeleným mužíčkem močálovité vizáže a tento zážitek se neblaze podepsal na psychice každého z nich. Po ekonomické stránce je prozatím štace do Willy poněkud neúspěšná. Reklamní brožurky stále tíží Billyho kufry, zatímco by už dávno měly překážet v domácnostech zákazníků. Billy zmateně bloumá labyrintem uliček a ani zdaleka netuší, co mu přinesou následující sekundy. Nic z toho mu však neubírá na urputné odhodlanosti vnutit své zboží místním močálníkům a právě klepe na další dveře.

Úloha 1. (9 bodů): Hned vedle dveří si nějaké místní dítě hrálo zajímavou hru. Hra spočívá v tom, že se do čtvercové sítě 10×10 musí naskládat kostičky tvaru L (viz obrázek 1), tvaru Z (viz obrázek 2) a tvaru T (viz obrázek 3).Všech kostiček se může použít libovolný počet. Billyho napadlo, jestli by hra byla hratelná (tehdy, pokud kostičkami můžeme vyplnit celou čtvercovou síť), kdyby se kostiček tvaru T použilo lichý počet.



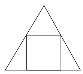
Z domku tvaru vyschlého pařezu se vybatolila korpulentní dáma více než středního věku s válečkem na těsto v napřažené ruce. Billy poučen z předchozích nezdarů,

KoKoS, Gymnázium Mikuláše Koperníka, 17.listopadu 526, 743 11 Bílovec ✉

se ani nepokoušel pořádně otevřít oči, aby ho vizáž nové zákaznice nevyvedla z míry. Opomeneme-li, že rukou měla madam více než dva páry, jednalo se o prachobyčejnou zástupkyni víl zubniček, která byla pravda již trochu sešlá věkem, ale stále ochotná podstrčit vám pod polštář cukrovinku výměnou za váš čerstvě vypadnutý zub.

Dosti bylo vyčkávání na zápraží, Billy se okamžitě pustil do chrlení nepřetržitého proudu slov. Stále se semknutými víčky ze sebe hrnul jednu výhodu domácího počítače za druhou, a tudíž bylo nad jeho rozlišovací schopnosti registrovat, že jej nikdo neposlouchá. Zřejmě se víle v troubě začala připalovat další várka sušenek, která měla být rozdělena mezi všechny děti trpící akutní ztrátou mléčného chrupu. Nechala Billyho jeho osudu a odkráčela zpět do kuchyně. Protože se po první Billyho větě neozvalo žádné bouchnutí dveří, právem se začal mylně domnívat, že se k němu opět přiklání štěstěna. Nabral kuráž a o to horší byl okamžik, ve kterém si uvědomil, že místo k zákaznici pronáší svou vybroušenou řeč k věšáku na kabáty. Ani se nerozloučil a se svěšenou hlavou se odloudal na malinké náměstíčko k místní kašně.

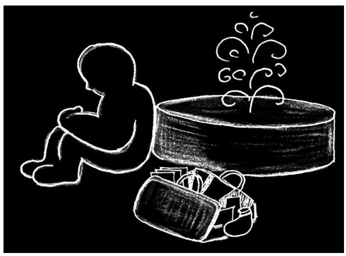
Úloha 2. (7 bodů): Podstava, na které byla kašna postavena měla tvar rovnostranného trojúhelníku o straně a. Sama kašna měla čtvercový půdorys a na trojúhelníkové podstavě byla umístěna tak, že dva její rohy se dotýkaly dvou stran podstavy a jedna strana kašny se stranou podstavy splývala (viz obrázek). Vypočtěte obsah půdorysu kašny (počítejte obecně).



Billy si sedl na zem, zul si boty a celodenní chůzí zmožené nohy ponořil do fontány, která byla velká právě jako lavor.

Spatřit takto frustrovaného obchodního cestujícího je pohled jen pro velmi silné nátury. Billy seděl schoulený uprostřed náměstí jako hromádka neštěstí. Kufry vztekle mrštil za sebe, až málem pobořily jarmareční stánky, a uvolněné ruce beznadějně ovinul kolem kolen. Snad si i párkrát povzdechl a možná se mu na kraji spodního víčka objevila i drobná slzička. Každopádně byl v koncích.

Úloha 3. (6 bodů): A jako vždy, když je Billy v koncích, vzpoměl si na matematický příklad. Kdysi slyšel, že nelze sestavit trojúhelník, jehož těžnice mají délky 2 cm, 4 cm a 5 cm. Zjistěte, jestli je to pravda? Bohužel ani myšlenky na matematiku dnes Billymu nespravily náladu.

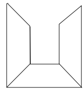


Nikdo se nevynořil z okolních domů s hrnkem horké čokolády ozdobené pořádnou vrstvou nadýchané šlehačky a nezeptal se cizince, co jej v tak nádherně slunečný den trápí. Inu dobrá, v takovou starostlivost místních obyvatel Billy nedoufal, ale zase na druhou stranu, mohli by projevit kapičku empatie. Jednoduše Billyho přepadla pěkně velká deprese okořeněná sebelítostí a pocitem marnotratnosti.

Jak tak bezmocně seděl a máčel nohy ve fontáně, slunce se najednou rozhodla ukončit svou hru na babu a každé se odebralo za svou část obzoru. Nenahradilo je však žádné jiné nebeské těleso, a tak se do místních ulic až překvapivě rychle rozlila tma. Prudce se ochladilo a Billy měl co dělat, aby stihnul vytáhnout nohy z kašny dříve, než se ta trocha vody v ní proměnila ve váleček ledu. Už neměl sílu celou situaci nijak komentovat, vytáhl z kufru velký zimník a pod hlavu si rozložil několik brožurek. Tak jako pravý bezdomovec, kterým zde nakonec stejně byl, se uvelebil v jihozápadním rohu náměstí a s hořkostí zavzpomínal na včerejší zprvu naprosto normální den.

Jó včera, to taky svítilo slunce (samozřejmě jenom jedno) a Billy se jako každé ráno připravoval na nadcházející den. Jeho koupelnový rituál fungoval jako hodinový strojek a nebylo tedy zapotřebí, aby při něm byl Billy vůbec vzhůru. Ruce automaticky sáhly po kartáčku na zuby.

Úloha 4. (5 bodů): Kartáček na zuby měl Billy skutečně prvotřídní. Vůbec nebyl obvyklého tvaru. Konec kartáčku byl ve tvaru jakési hranaté podkovy (viz obrázek), která se skládala ze 3 stejných rovnoramenných lichoběžníků. Menší základna každého lichoběžníku je dvakrát menší než ta větší a úhel, který svírá větší podstava s rameny lichoběžníku je 45°. Spočtěte obsah plochy podkovy, jestliže rameno lichoběžníku je velké 2 cm.



Stejně automaticky přidaly přesně odměřené množství pasty. Billy přímo nesnášel, když měl v puse přehršle pěny nehledě na to, jak neekonomické to bylo plýtvání. Ze začátku jeho kariéry byl trochu problém s holením, protože utržené ranky jej vždy vytrhly ze sladkého spánku. Billy se tak moc snažil natrénovat tahy po tváři, až dokonale ztupil žiletku, která mu pak už nebyla schopna ublížit, natož ho oholit. S plnovousem si připadal ještě výjimečnější než ostatní obchodníci.

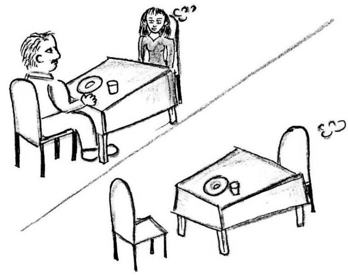
Další položky na ranním seznamu se daly odbýt celkem rychle. Lehce posnídat, přeleštit boty a ještě naposledy zkontrolovat preciznost kravatového uzlu, aby se mohl vydat na cestu do práce. Po procházce parkem by jako obvykle dospěl ke dveřím své milované kanceláře a načal další z dlouhé řady všedních dnů. Billy žádné jiné než pracovní dny neznal. Rodinu mu suplovaly strmě stoupající grafy jeho úspěšnosti a práce podomního prodejce pro něj byla natolik zajímavá, že nepotřeboval žádné jiné koníčky. Všechny jeho dny plynuly monotónně v přísném řádu.

Přesně ve dvanáct nula nula opouštěl Billy své kancelářské útočiště a vydával se do místní kantýny na oběd.

Úloha 5. (8 bodů): Po cestě Billy zpozoroval něco, co ho dovedlo k zamyšlení. Z okna viděl, že se od sebe 2 běžci rozběhli pod pravým úhlem. Běžec A rychlostí $5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ a běžec B rychlostí $6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Za pět minut si však běžec A zřejmě vzpomněl, že chce běžci B namasírovat nohy. Běžec B však běžel stále dál. O jaký úhel změnil běžec A svůj směr, jestliže běžce B dohnal tou nejkratší cestou rychlostí $30\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$? Pozn.: Neuvažujte zrychlení, počítejte s okamžitou změnou rychlosti (a směru). Neuvažujte překážky stoupání a klesání dráhy.

Ne že by byl nějaká držgrešle, ale jako správný profesionál se snažil snížit provozní náklady na minimum. A někde tady mezi třetím a čtvrtým stolem u okna se stala podstatná změna v Billyho životě. Zahlédl ženu.

Rozhodně nečekejte žádný románek, nejsme přeci v pohádce a už vůbec ne v brakové červené knihovničce. Navíc, když si představíte všechny ty výdaje, které jsou s takovou romancí spojené, zajisté pochopíte, že něco takového, jako zamilovat se, se nemohlo Billymu přihodit. Nicméně křehká postava Billyho natolik zaujala, že se osmělil a postavil svůj tác s jídlem pouhých pět stolů od záhadné slečny. I tak je při nejlepší vůli dělila půlka kantýny, což zajišťovalo plachému obchodníčkovi zdánlivý pocit bezpečí. Spokojeně rozdrobil housku do výborného vývaru, avšak v následující chvilce mu leknutím vypadla lžička z ruky.

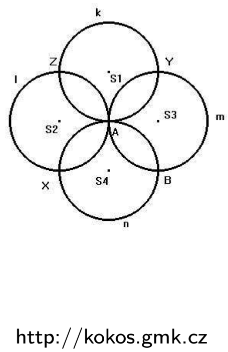


S náramným cáknutím dopadla na hladinu polévky a notnou dávku vystříkla Billymu přímo na pečlivě vyžehlenou košili. To vše jen proto, že se slečinka znenadání objevila přímo naproti němu. Zhmotnila se by byl mnohem výstižnější výraz. V jedné chvíli si s chutí smáčí svůj nosík v kakau a ve druhé cink a sedí naproti Billymu. Ani nepoužila léty osvědčený trik, kdy odsunete židli, zvednete se, uděláte pár kroků a zase se posadíte. Nic z toho v jakémkoliv pořadí. Jednoduše, jakoby mimochodem pomrkávala na Billyho, čímž podněcovala rozrůstající se ruměnec v jeho tváři.

„Dobrý den," pronesla neznámá písklavým hláskem a ještě o tóninu výše pokračovala v hovoru, aniž by dala Billymu prostor odpovědět, „všimla jsem si, že sem chodíte často obědvat a prosím neuražte se, ale ráda bych s vámi projednala jistou obchodní nabídku." Billy nebyl zvyklý vést jiné než pracovní rozhovory a začátek dialogu mu naháněl hrůzu. Jakmile však došlo na jeho oblíbené slovní spojení „obchodní nabídka" , přestal úpěnlivě zírat na dno polévkového talíře a zvedl oči ke svému protějšku. Velice ho potěšilo, že se od něj neočekává přílišná výřečnost, protože slečna mluvila naprosto nepřetržitě. Snad si ani nedopřála drobné pauzy pro nadechnutí. Billymu se tak naskytla příležitost si ji pořádně prohlédnout.

Byla na jeho vkus nezvykle drobná a její pohyby působily poněkud trhaně, jakoby snad nedokázala plně ovládat své tělo. Malý obláček nazelenalého dýmu nad jejím pravým uchem připisoval značně zakouřenému prostředí kantýny a přílišnou kostrbatost v ramenou snad způsobovala extravagantní halenka.

Úloha 6. (5 bodů): Na halence byl vytištěn obrazec. Skládal se ze čtyř kružnic k, l, m, n se středy po řadě $S_1, S_2, S_3 a S_4$. Všechny kružnice mají stejný poloměr 2 cm. Kružnice se navzájem protínají celkem v pěti bodech. Označme je A, B, X, Y, Z (viz obrázek). Bod A je průnikem kružnic k, l, m, n, bod B průnikem kružnic k, l, bod X průnikem kružnic k, m, bod Y průnikem kružnic l, m a bod Z průnikem kružnic m, n. Vypočtěte obsah trojúhelníku S_1S_2B.



Jinak na něj působila mile a ještě bohuliběji mu zněla její slova o zaručeném obchodním úspěchu. Snad jen zbývá dodat, že Billy neměl v zásobě moc NORMÁLNÍCH dívek, se kterými by chování neznámé slečny mohl srovnat.

Trvalo docela dlouho, než se Princezna skřítků navlékla do kostýmu, který ji měl ochránit před zraky okolí a umožnit co nejlépe splynout s davem. Lidský svět se lišil především svou velikostí a také nepochopením pro drobná kouzla, kterých se Princezna musela během své výpravy vzdát. Většinou zapomínala, že tady je zvykem dveře nejdříve otevřít, než jimi projdete, a vůbec zkoordinovat své pohyby bez křídel ji přidělávalo nejednu vrásku na čele. Nebylo nikterak pohodlné na jejích tenkých nožkách nésti dvojnásobnou zátěž, navíc zde byl problém s motorem, který co chvilku vyprodukoval nazelenalou smrdutou páru. Neustále se musela ujišťovat, že se nikdo nedívá, než otevřela větrací ventil za pravým uchem, kterým mohla pára uniknout z převleku. Nic ji však nemohlo odradit od plánu přivést do své země prvotřídního obchodního cestujícího. Willy byla hrozně nudná díra a jí přišlo naprosto k popukání pozorovat rostoucí vztek ve tvářích lidí, kterým se na prahu dveří zjevil obchodník. Trocha čerstvého vzduchu a nezvyklých situací snad Princeznu dokáže vytrhnout ze staleté nudy.

Stačilo se pouze zmínit, že do vesnice ještě nikdy nepřijel žádný obchodník a její obyvatelé přímo lační po kontaktu s moderní dobou, a Billymu začaly samy od sebe před očima naskakovat peníze na jeho kontě. Netrvalo to dlouho a horlivě souhlasil s pozváním do „zlatého dolu“ dokonce s okamžitou platností. Luplo to a Billy byl ten tam.

*Řešení úloh 2. série posílejte do **29.11.2010** na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 11 Bílovec

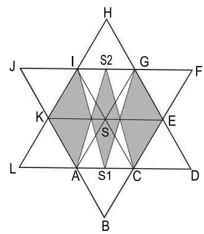
Autorská řešení 1. série

Úloha 1.

Nejprve spočítáme o kolik se ručičky posunou za 1 minutu. Velká ručička oběhne celý cifenik ($360°$) za 60 minut. Za jednu minutu se tedy posune $6°$ ($\frac{360°}{60} = 6°$).
Malá ručička uběhne pouze $30°$ (10 minut), tedy se za jednu minutu posune $0,5°$ ($\frac{30°}{60} = 0,5°$).
Za jednu minutu se tedy úhel mezi nimi zvětší o $5,5°$ ($6° - 0,5° = 5,5°$). Z toho lze již jednoduše spočítat, jak dlouhá doba musí uplynout, aby se znovu překryly (tj. úhel mezi nimi se zvětší na $360°$). $\frac{360°}{5{,}5} = 65\frac{5}{11}$ minut.
Odhadem zjistíme, že nejdříve po 8:10 se ručičky překryjí někdy mezi 8:40–8:45. Překryjí se tedy užpo osmé od 0:00. Jednoduchým výpočtem zjistíme, kdy přesně to je:
$65\frac{5}{11} \cdot 8 = 523\frac{7}{11}$ minut, převedeno na hodiny v 8 hodin 43 minut $38\frac{2}{11}$ sekund.
Odečteme-li od toho čas, kdy Billy přišel do vesnice (8:10), získáme dobu, kterou strávil ve vesnici. Tedy 33 minut a $38\frac{2}{11}$ sekund.

Pája

Úloha 2.



Vím, že obvod obrazce je 36 cm. Obrazec má 12 stran $\rightarrow \frac{36}{12} = 3$. Protože trojúhelníky jsou rovnostranné, je to i strana šestiúhelníku.
Potřebuji znát obsah šestiúhelníku. Ten spočítám: $S = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot sin\alpha$
Strana $a = 3$ cm a úhel $\alpha = 60°$ - šestiúhelník je složen z rovnostranných trojúhelníků.
Výsledný obsah šestiúhelníku: $S_1 = \frac{27 \cdot \sqrt{3}}{2}$ cm^2
Nyní odečtu bílé trojúhelníky, jsou to celkem čtyři stejné trojúhelníky. Každý z nich má výšku shodnou s výškou trojúhelníku ASC a délka jejich strany je polovina délky strany šestiúhelníku.
Pomocí Pythagorovy věty vyjádřím výšku trojúhelníku: $v = \sqrt{3^2 - 1,5^2} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}$
Nyní můžu vyjádřit obsah všech čtyř trojúhelníků: $S_2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{2}$
Obsah vybarvených částí je: $S_1 - S_2 = \frac{27 \cdot \sqrt{3}}{2} - \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{2} = 9 \cdot \sqrt{3}$
Obsah vybarvené plochy je $9 \cdot \sqrt{3} = 15,6$ cm^2.

Marťa

Úloha 3.

Zjistíme pořadí 2010. písmena ve spirále. Toto pořadí vydělíme počtem písmen ve slově "MIKULASKOPERNIK" - zjistíme, kolikrát tam je. A ze zbytku po dělení zjistíme, kolik písmen přebývá, potažmo poslední písmenko.
Pořadí písmena v úhlopříčce … n
Pořadí písmena ve spirále … k
Z obrázku vidíme, že $k = (2n - 1)^2$
Za n dosadíme 2010.
$k = (2 \cdot 2010 - 1)^2 = 16152361$
$16152361 : 15 = 1076824(1)$
Protože zbytek je jedna písmenu bude M.

Filda

Úloha 4.

Trojúhelníky AXC a XBC mají stejný obsah - protože X je střed strany AB proto mají úsečky AX a BX stejnou délku. Výšku mají tyto trojúhelníky společnou.
Jejich obsah je roven polovině obsahu trojúhelníku ABC.
Stejnou úvahu provedu pro trojúhelníky ABY a AYC. Opět mají stejný obsah a ten je roven polovině obsahu trojúhelníku ABC.
Nyní si všimnu, že trojúhelník ABY je mohu rozdělit na trojúhelník AXT a čtyřúhelník $XBYT$.
Obdobně mohu rozdělit i trojúhelník AYC na trojúhelník CYT a čtyřúhelník $XBYT$.
Trojúhelníky ABY a AYC mají stejné obsahy, obsahují čtyřúhelník $XBYT$. Trojúhelníky AXT a CYT musí mít stejný obsah.
Billy tedy neměl pravdu.
Vůbec nazáleží na tom, jaký trojúhelník uvažujeme. Neuznával jsem řešení, která zkoumala pouze rovnostranný trojúhelník, nebo byla založena na narýsování trojúhelníku a měření.

Kuba

Úloha 5.

1. Druhá až čtvrtá cifra mohou být číslice dva nebo tři

2. Druhá až čtvrtá cifra jsou menší než čtyři, jedna cifra je šest → šest je první nebo pátá cifra

3. Vyřazovací metoda

   a) Šetstka jako první cifra
   $6 * *3* \rightarrow 62232$ neobsahuje dvě dvojice číslic
   $6 * *3* \rightarrow 6232*; 6322*$ neobsahuje dvě dvojice číslic, 63322 obsahuje lichý počet sudých číslic

   b) Šestka je pátá cifra
   $* * *36 \rightarrow 22236$Vyhovuje
   $* * *26 \rightarrow *3226; *2326; 23326$ ani jedna z možností nevyhovuje nejsou dvě dvojice

Všem podmínkám úlohy vyhovuje pouze číslo 22236.

Filda

Úloha 6.

Každých 10 minut se dělil, každou hodinu 6-krát (včetně první hodiny!). Takže za 24 hodin proběhlo dělení 144-krát $24 \cdot 6 = 144$. Při každém dělení se počet ztrojnásobil - takže počet Alfrédů bude mocninou 3. Konkrétně 3^{144} protže se dělil právě 144 krát.
Počet Alfrédl v akváriu byl tedy 3^{144}.
$\frac{1}{9}$ je v podstatě 3^{-2}. $3^144 \cdot 3^{-2} = 3^{142}$. To znamená, že $\frac{1}{9}$ Alfrédů tam byla před dvěma děleními - před dvaceti minutami.

Petr, Michal

Zakousni se! POZNÁNÍ

A teď děcka něco úplně nového, na těchto stránkách se bude objevovat krátké povídání na různá témata z matematiky. Vždy zde bude napsáno, jak úlohy daného typu řešit a závěrem budou také připojeny nějaké řešené příklady z dané problematiky. Tento text vám pomůže především k rozšíření vašich obzorů v matematice, ale také třeba jako návodné úlohy k některým příkladům v sérii. Takže se určitě vyplatí číst tyto stránky pozorně.

Počítání s invarianty

Počítání s invarianty je velice účinné a jednoduché i v těžkých příkladech. Nejdříve ale musíte invariant v úloze najít. A co že je ten invariant? Invariant je něco co se nemění. Jestli vám to ani teď nic neříká, tak se nebojte hned se všechno dozvíte.

Invarianty se používají v úlohách, kde se opakuje nějaký krok, který změní hodnoty v úloze. Většinou je cílem najít něco, co se nemění, ale to není vždy úplně lehké, protože invariantů existuje nespočet druhů. Nejlepší bude ukázat si to na nějakém příkladu.

Úloha 1: Na tabuli jsou napsaná nějaká přirozená čísla. V jednom kroku můžeme některé dvě smazat a napsat na tabuli jejich součin. Po několika krocích zbude na tabuli poslední číslo. Jaká čísla (obecně) musí na tabuli být, aby poslední číslo bylo liché?

Řešení:

V této úloze je invariantem součin všech čísel na tabuli. Ten zůstává pořád stejný. Poslední číslo, které na tabuli zbude, je tedy součinem všech čísel, která byla napsaná na tabuli na počátku. Aby toto číslo bylo liché, nesmí mít ve svém rozkladu na prvočísla číslo 2. Jelikož pouze lichá čísla neobsahují ve svém součinu dvojku, tak na začátku musí být na tabuli napsaná pouze lichá čísla. Dobré ne? Jelikož tyto úlohy nepatří k zrovna nejjednodušším a neexistuje k nim nějaký obecný postup, můžete se v jejich řešení zdokonalit pouze jejich počítáním. To se hold nedá nic dělat. Proto zde uvádím další řešené příklady.

Úloha 2: Mějme šestiúhelník. Ke každému jeho vrcholu připíšeme po řadě čísla 1, 0, 1, 0, 0 a 0. V jednom kroku můžeme zvýšit čísla u sousedních dvou vrcholů o jedna. Je možné, aby se po konečném počtu kroků, všechna čísla rovnala?

Řešení:
Označme si čísla u vrcholů šestiúhelníku $a_1, a_2, ..., a_6$. Nyní najdeme invariant. Invariantem by mohl být tento vztah: $I = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$. Přičteme-li ke dvěma sousedním číslům jedničku, hodnota invariantu se nezmění. Pokud by se všechna čísla rovnala, hodnota invariantu je rovna nule. ($I = 0$). Na začátku je však hodnota invariantu rovna dvěma ($I = 2$). Jelikož se hodnota invariantu neměnní, tak stavu, kdy se všechna čísla sobě rovnají, nemůžeme dosáhnout. Chytré ne?

Úloha 3: : Na tabuli jsou napsaní čísla 1, 2, …, 222. V jednom kroku můžeme smazat libovolná dvě čísla a nahradit je jejich součtem nebo nezáporným rozdílem. Může jako poslední zbýt na tabuli číslo 2?

Řešení:
Jednou z možností je to zkoušet do aleluja, ale z toho žádná sranda nekouká (leda funus). Nebo můžeme zkusit najít invariant, kterým je tady parita (sudost nebo lichost) čísel napsaných na tabuli. Na začátku je na tabuli 111 sudých a 111 lichých čísel. Pokud sečteme nebo odečteme dvě lichá čísla, počet lichých čísel na tabuli klesne o dva a počet sudých stoupne o jedna. Takto rozebereme i další možnosti, viz tabulka. Nyní vidíme, že počet lichých čísel může klesat pouze o dva a tedy nikdy neklesne na nulu, tzn. že jako poslední číslo na tabuli zbude liché číslo, v žádném případě tedy dvojka.

	Počet sudých čísel	Počet lichých čísel
S ± S	-1	0
L ± L	+1	-2
S ± L	-1	0

Pája

Výsledkové listiny

Tady najdete jen několik nejlepších řešitelů, pro úplné výsledkové listiny se podívejte na naše internetové stránky.

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
0.	Ideální	KoKoS	8	5	9	7	6	5	40	Hafo
1.	Berenika	Čermáková	-	-	-	-	6	5	11	11

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
0.	Ideální	KoKoS	8	5	9	7	6	5	40	Hafo
1.-2.	Aleš	Krčil	8	5	9	7	6	5	40	40
	Alžběta	Maleňáková	8	5	9	7	6	5	40	40
3.	Jan	Havelka	8	5	9	0	6	4	32	32
4.	Eliška	Červenková	1	5	9	0	6	5	26	26
5.	Pavel	Turek	6	4	9	-	0	5	24	24
6.	Pavel	Vondráček	1	5	5	0	1	3	15	15
7.	Jiří	Gbelec	-	5	-	-	6	-	11	11
8.	Anastázie	Chalupová	1	-	0	0	0	1	2	2

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
0.	Ideální	KoKoS	8	5	9	7	6	5	40	Hafo
1.	Anna	Kufová	8	5	9	7	6	5	40	40
2.	Marek	Janka	7	4	9	7	6	5	38	38
3.-5.	Jana	Gebauerová	8	5	9	0	6	5	33	33
	David	Gráf	8	5	9	0	6	5	33	33
	Ondřej	Pavelka	8	5	9	0	6	5	33	33
6.-7.	Vít	Grosser	8	5	8	0	6	5	32	32
	Veronika	Hájková	7	3	9	7	1	5	32	32
8.-9.	Anna	Červenková	1	5	9	0	6	5	26	26
	Daniel	Pišťák	8	2	0	5	6	5	26	26
10.-11.	Zuzana	Beigerová	8	5	9	-	-	-	22	22

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	∑
	Lukáš	Klocek	8	5	9	-	-	-	22	22
12.-13.	Veronika	Hánová	1	5	9	0	1	5	21	21
	Eliška	Pfaurová	1	5	9	0	1	5	21	21
14.-15.	Lukáš	Frankl	1	2	9	0	1	2	15	15
	Kateřina	Grygarová	-	-	9	0	6	-	15	15
16.	Jakub	Novák	8	-	-	-	1	4	13	13
17.	Eva	Kubelová	5	2	-	0	0	5	12	12
18.	Daniel	Musil	1	0	8	0	1	-	10	10
19.	Iveta	Márovcová	5	0	0	0	1	0	6	6
20.	Jindřich	Brož	1	1	-	0	1	2	5	5
21.	Jakub	Brož	1	1	-	0	1	0	3	3
22.	Kristýna	Filípková	1	-	-	0	1	0	2	2

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	∑
0.	Ideální	KoKoS	8	5	9	7	6	5	40	Hafo
1.-2.	Ondřej	Darmovzal	8	4	9	7	6	5	39	39
	Václav	Rozhoň	8	5	8	7	6	5	39	39
3.-4.	Michael	Matějka	8	5	8	6	6	5	38	38
	Szymon	Wantuła	7	5	9	7	6	4	38	38
5.	Martin	Vančura	8	5	5	7	6	5	36	36
6.-7.	Matěj	Dirr	8	5	9	0	6	5	33	33
	Jan	Marek	8	5	9	0	6	5	33	33
8.-9.	Radim	Bárta	8	4	9	-	6	4	31	31
	Jan	Skořepa	6	5	9	0	6	5	31	31
10.-11.	Jan	Erhart	0	5	9	0	6	5	25	25
	Eva	Harlenderová	-	5	9	-	6	5	25	25
12.	Štěpánka	Dobalová	-	5	9	0	6	4	24	24
13.	Tomáš	Müller	1	5	9	1	1	5	22	22
14.-15.	Diana	Hachová	6	5	-	0	6	0	17	17
	Petra	Pavelková	1	5	-	0	6	5	17	17
16.	Jan	Jež	6	-	-	-	6	2	14	14
17.	Veronika	Synková	6	1	-	-	6	0	13	13
18.-19.	Vojtěch	Kovář	-	-	-	0	6	5	11	11
	Pavel	Kubíska	6	4	-	0	1	-	11	11
20.	Pavla	Baarová	-	5	-	-	-	5	10	10
21.-22.	Klára	Dubská	1	5	2	0	0	0	8	8
	Kristýna	Krupičková	-	1	5	0	0	2	8	8