KOKOS

28.ročník ⋆ **3.leták**

Milý řešiteli!

Máme tady nový rok a s ním i další sérii KOperníkova Korespondenčního Semináře. Chtěli bychom Ti v tomto roce popřát jen to nejlepší, hodně vyřešených matematických úloh nejen z našeho semináře a dobře fungující kalkulačku. Úlohy v této sérii jsou tematicky zaměřeny na kombinatoriku a pravděpodobnost, přičemž více o tomto odvětví matematiky se dočteš v PiRoHu na konci této série. Už brzy se také dozvíš více o dalším soustředění, které plánujeme na jaro 2016.

Zadání úloh

Přišlo září a s ním nový školní rok. Ducha už Pepík dlouho neviděl, ale tajemná kniha mu pořád ležela na poličce. Ani se ji zatím nenamáhal pokusit přeložit, ale rozhodl se, že se o to pokusí, a ne sám. A tak chtěl o víkendu pozvat Ignáce na pyžamovou párty, aby společně záhadu vyřešili. Ignác s nápadem souhlasil, ale připomněl Pepíkovi, že měl do školy několik domácích úkolů, které musel přednostně spočítat. Pepík je ovšem taky ještě hotové neměl, a tak se do toho hned pustil.

Úloha 1. (9 bodů): Mějme tři přirozená čísla a, b, c, jejichž součin je roven číslu 450. Určete počet uspořádaných trojic čísel a, b, c, pro která daná rovnost platí.

Pepík měl příklady brzo hotové, a tak mu nezbývalo nic jiného než čekat. Vzal do rukou knihu a trochu si ji prolistoval, ale stejně mu to k ničemu nebylo. Textu sice kniha neobsahovala moc, jen tu jednu dvojstranu, ale i tak to bylo na Pepíka, který četl maximálně tak komiksy a latinsky vůbec neuměl, moc. Proto si před Ignácovým příchodem ještě sedl, vzal do ruky hrací kostky a chvíli si o samotě koulel.

Úloha 2. (7 bodů): Pepík háže třemi kostkami, na kterých jsou vždy dvě jedničky a potom čísla 2-5. Jaká je pravděpodobnost, že hodí:

a) tři jedničky

b) tři stejná čísla (kromě jedniček)

c) dvě jedničky a dvojku

KoKoS, Gymnázium Mikuláše Koperníka, 17.listopadu 526, 743 01 Bílovec

Najednou zazvonil zvonek – to už přišel Ignác. Přivítal se s Pepíkem a hned na něj vychrlil tolik věcí, že až z toho Pepíkovi šla hlava kolem. Co ale hlavně druhý chlapec zdůrazňoval, bylo, že nepochopil jeden z příkladů v domácím úkolu a jestli by mu kamarád nepomohl. Pepík si povzdechl a svolil.

Úloha 3. (6 bodů): Určete počet všech přirozených
a) dvojciferných
b) trojciferných
čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.

Po tomhle úkolu oběma chlapcům trochu hučelo v hlavě, a tak se rozhodli jít ven. Kdo ví, třeba tam i potkají ducha. Ale nepotkali. Chudáci chlapci se po chvíli začali nudit a přemýšleli, jak by se zabavili. Nic nevymysleli, a tak si sedli na lavičku a poslouchali ptačí zpěv.

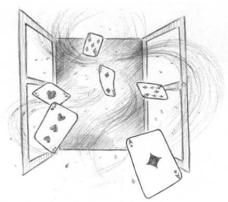
Úloha 4. (8 bodů): Na 4 stromech byli ptáčci. Na jednom byli zelení, na druhém červení, na třetím modří a na čtvrtém žlutí. Počet všech ptáčků byl 60. Zelení ptáčci zpívali vždy co 3 minuty a hlasitost každého z nich byla 20 H, červení zpívali co 5 minut s hlasitostí 15 H, modří co 7 minut s hlasitostí 25 H a žlutí co 8 minut s hlasitostí 35 H. V okamžiku, když zpívali úplně všichni ptáčci dohromady, byl součet jejich hlasitostí 1420 H. Víme, že modrých ptáčků bylo přesně 17, součet hlasitostí zelených ptáčků byl alespoň 600 H, ale méně, než 650 H, součet hlasitostí žlutých ptáčků byl alespoň 300 H.
a) Co kolik minut zpívají všichni ptáčci dohromady?
b) Co kolik hodin zpívají všichni ptáčci dohromady.
c) Kolik je zelených, červených a žlutých ptáčků?

Poslouchání ptáčků ovšem chlapce brzo přestalo bavit a navíc už se začínalo stmívat, a tak rychle zamířili zpět k Pepíkovi domů. Tam otevřeli knihu a Google překladač, ale i s jeho výpomocí z textu moc chytří nebyli. Některá slova dokonce nešla moc přečíst a z toho mála, co šlo, rozluštili jen slova jako hrad, čaroděj, dluh a zakopaný. Chlapci z toho byli celí mrzutí, a tak se rozhodli, že si zahrají karty, aby se uklidnili.

Úloha 5. (6 bodů): Pepík a Ignác hrají karty. Jeden vždy otočí kartu a podívá se na ni (ale neukáže ji druhému) a druhý hádá barvu karty (piky, kříže atd.) Jaká je šance, že druhý uhádne všech 64 karet správně?

Mezitím venku začalo jemně pršet a po chvíli se z toho stala pořádná bouřka. Ignác prohlásil, že už ho karty nebaví, a šel se do koupelny umýt. Pepík se opět ocitl o samotě. Byl zklamaný, že dnes na nic nepřišli a přemýšlel, co asi znamenala ta slova, která se jim podařilo přeložit. Že by byl duchův poklad zakopaný na nějakém hradě? Ale po světě jsou stovky hradů, prohledat je všechny by zabralo hrozně dlouho. Pepík si povzdechl. Budou muset počkat, jestli se jim duch uráčí někdy pomoct. Jak tak Pepík čekal na Ignáce, začal se nudit, a tak si s kartami hrál sám.

Úloha 6. (6 bodů): Pepík vzal balíček 32 karet, zamíchal ho a karty rozdělil na 8 hromádek tak, že v každé hromádce byly 4 karty. Jaká je pravděpodobnost, že v každé hromádce budou mít všechny karty stejný znak?



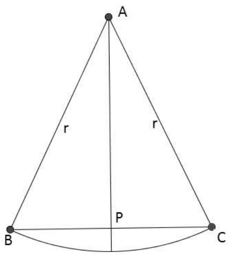
Najednou se s obrovským rachotem otevřelo okno a do pokoje začalo pršet a fučet. Některé karty vyletěly z okna, ač se jim v tom Pepík usilovně snažil zabránit. To už mu náladu zkazilo úplně. Posadil se na postel a smutně koukal do země, když vtom se nad ním ozvalo: „Co tak smutně, hochu?“ vzhlédl a nevěřil svým očím – v jeho pokoji stál duch!

*Řešení úloh 3. série posílejte do **10.2.2016** na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 01 Bílovec

Autorská řešení 2. série

Úloha 1.



Víme, že $|AP| = r - 5$, $|PC| = 50$ a délku úsečky AC si označme jako r . Využijme trojúhelníku ACP a pomocí pythagorovy věty si vytvořme rovnici a upravme:
$r^2 = (r-5)^2 + 50^2$
$r = 252,5$

K výpočtu délky oblouku využijeme vzorec, kde D je délka oblouku a α je úhel BAC:
$D = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180}$
Velikost úhlu α, lze spočítat pomocí goniometrických funkcí. Velikost úhlu vychází přibližně $\alpha = 22°50'$. Dále stačí dosadit do rovnice. Délka lana je přibližně 100,665 m.

Jiří

Úloha 2.

Nejmenší společný násobek čísel 4;5 a 7 je 140, proto každé 140-té číslo bude dělitelné těmito čísli. Počet takových čísel menších než 1000 určíme jako podíl 1000 a 140, což je 7.

Kuba

Úloha 3.

Po sestrojení osy úhlu, který svírají tečny, dostaneme pravoúhlý trojúhelník STT_1. $tg30° = \frac{r}{5}cm$, $r = 2,887cm$, odtud $o = 18,14cm$ a $S = 26,184cm^2$

Berča

Úloha 4.

Pokud výška 3. sloupce byla 100%, tak výška 2. sloupce byla 140%. Abychom udělali sloupce stejné výšky, potřebujeme na to určitý počet knížek vysokých 3 cm nebo o 50% víc knížek vysokých 2 cm. Pokud počet knížek v 3. sloupci byl 100%, tak počet knížek v 2. sloupci byl 140%+50% z 140% = 140%+70% = 210%. Počet knížek v 3. sloupci byl $\frac{1}{6}$ ze všech knížek, takže počet knížek v 2. sloupci byl $\frac{1}{6} \times \frac{210}{100} = \frac{210}{600} = \frac{7}{20}$. Tyto počty musíme převést na nejmenší možný společný jmenovatel, protože chceme zjistit počet knížek v 1. sloupci, který je nejmenším možným celočíselným číslem.
Proto počet knížek v 3. sloupci = $\frac{10}{60}$, v 2. sloupci= $\frac{21}{60}$, v 1. sloupci = $\frac{60}{60} - \frac{31}{60} = \frac{29}{60}$. To znamená, že počet knížek vysokých 1 cm byl 29. Ve třetím sloupci bylo 10 knížek vysokých 3 cm, takže sloupec byl vysoký 30 cm. První sloupec byl tedy nižší o 1 cm od sloupce třetího.

Damian

Úloha 5.

Nejprve si určíme poměr obsahů trojúhelníků ABE a ESC. Víme, že to jsou pravoúhlé trojúhelníky, které mají jednu odvěsnu stejně dlouhou ($|AE| = |CE|$). Obsah trojúhelníku se vypočítá jako$\frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a$. Výškami v trojúhelnících tedy budou zmíněné stejně dlouhé strany, dále víme, že trojúhelník ABE má základnu dvakrát delší než trojúhelník ESC ($|AB| = 2 \cdot |SC|$) $\rightarrow$ má rovněž dvakrát větší obsah $\rightarrow S_{ABE} : S_{ESC} = \frac{1}{2}|2SC| \cdot v : \frac{1}{2}|SC| \cdot v = 2 : 1$.
Nyní zbývá určit poměr obsahů trojúhelníků ESC a ASC. Vidíme, že strana SC je společná pro oba trojúhelníky. Tato úsečka bude ve vzorci pro výpočet obsahu sloužit jako základna. Je zřejmé, že výška trojúhelníku ESC (na stranu SC) je dvakrát delší než výška trojúhelníku ASC (na stranu SC) $\rightarrow S_{ESC} : S_{ASC} = \frac{1}{2}|SC| \cdot v : \frac{1}{2}|SC| \cdot \frac{v}{2} = 2 : 1$.
$S_{ABE} : S_{ESC} = 2 : 1, S_{ESC} : S_{ASC} = 2 : 1 \rightarrow S_{ABE} : S_{ESC} : S_{ASC} = 4 : 2 : 1$.

Barča

Úloha 6.

Číslo 2013 je liché, proto tohle číslo můžeme dostat pouze jako součet lichého a sudého prvočísla. Jediné sudé prvočíslo je číslo 2, proto druhé prvočíslo je 2011. Součin těchto čísel je 4022.

Tomáš

Kombinatorika a pravděpodobnost

V tomto PiRoHu si povíme něco o kombinatorice. Tento text by vám měl pomoct vyřešit úlohy v této sérii. V celém PiRoHu se bude objevovat spousta příkladů, některé budou řešené a ostatní budou určeny pro vaše procvičení, výsledky těchto úloh budou uvedeny na konci PiRoHu.

Kombinatorika

Kombinatorické pravidlo součinu

Mějme množinu A a množinu B. Množina A má 5 prvků a množina B má prvků 6. Pokud budeme chtít zjistit, jak lze kombinovat jeden prvek ze skupiny A s druhým prvkem ze skupiny B, bude počet kombinací roven součinu počtu prvků v jednotlivých skupinách (v tomto případě je to $5 \times 6 = 30$).

Pojďme si toto pravidlo ukázat na příkladu.

Mějme 3 světlé barvy a 4 tmavé barvy. Na paletě chceme smíchat jednu světlou barvu a jednu tmavou barvu. Kolika způsoby to můžeme provést? Řekněme, že světlé barvy budou bílá, žlutá, oranžová a tmavé budou modrá, zelená, černá, hnědá. Představme si, že jsme na paletu nanesli bílou barvu - k ní můžeme přidat 4 barvy tmavé (to jsou 4 možnosti). Dále uvažujme to samé, ale tentokrát s barvou žlutou, ke které zase lze přidat 4 barvy tmavé (další 4 možnosti). A poslední barva oranžová, kterou můžeme zkombinovat zase se čtyřmi barvami tmavými (4 možnosti). Což je celkem 12 možností, jak smíchat jednu světlou a jednu tmavou barvu. Co jsme vlastně udělali? Počet všech prvků (v tomto případě to byly barvy) z 1. skupiny jsme vynásobili s počtem prvků 2. skupiny. Prvky 1. skupiny jsou 3 a prvky skupiny druhé jsou 4 a 3×4 je skutečně 12, tudíž výsledek odpovídá i našemu předchozímu postupu.

Příklady na procvičení:

1. Kolik uspořádaných dvojic číslic na kostce (1-6) můžeme dostat, jestliže hodíme 2 krát kostkou?
2. Kolik uspořádaných trojic obrázků na minci můžeme dostat, jestliže hodíme mincí 3krát?

Permutace, variace, kombinace

Než si prozradíme, co znamenají tyto pojmy, pojďme se ještě seznámit s pojmem faktoriál, který budeme nadále hodně využívat. Faktoriál se značí vykřičníkem. Je to součin všech přirozených čísel, která jsou menší nebo rovna danému číslu. Vykřičník píšeme vždy za výraz, jehož faktoriál chceme spočítat.
Obecně: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 3 \times 2 \times 1$
např.: $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

Variace

Variace využíváme, pokud z nějaké množiny vybíráme určitý počet prvků, přičemž záleží na pořadí.

Ukažme si typickou úlohu na variace:

Mějme šest různých knih (označme je písmeny $A - F$) a tyto knihy chceme umístit na poličku. Spočítejte, kolika způsoby jimi lze zaplnit první 3 místa zleva.

Označme si místa zleva čísly 1-6. Víme, že na prvním místě může být 6 knih, ale na druhém místě už jich může být pouze 5, protože jedna kniha už je na místě prvním a my máme každou knihu právě jednou. Na třetím místě mohou být 4 knihy. Součinem těchto možností dostaneme, že počet variací je 120.
Zapišme si pravidlo pro počítání s variacemi:
$V(k, n) = \frac{n!}{(n-k)!}$

kde:
n - počet prvků (v našem příkladu to byly knihy)
k – počet prvků, jejichž pořadí nás zajímá
V - celkový počet variací
Variací se využívá v úlohách, kde nám záleží na pořadí prvků.

Permutace

Permutace jsou velice podobné variacím. Na rozdíl od variací, u permutací nás zajímají možná pořadí všech prvků. Pravidlo pro počítání s permutacemi je stejné jako u variací, pouze uvažujeme, že $k = n$.
Pravidlo pro počet permutací: $P(n) = n!$

Příklady:
3. Kolik pětimístných čísel lze zapsat pomocí číslic 1, 2, 3, 4, 5 pokud využijeme každou číslici právě jednou?
4. Kolik desetimístných palindromů lze zapsat pomocí číslic 0, 2, 4, 6, 8? (pozn. palindrom je číslo, které se v desítkovém zápisu, čte zleva i zprava stejně, např. 123454321)

Kombinace

Kombinace se využívají, pokud z nějaké množiny prvků vybíráme určitý počet prvků, přičemž nezáleží na pořadí, v jakém tyto prvky vybíráme. Typickou úlohou je sportka. Vybíráme ze 49 čísel 6 tak, že nezáleží, v jakém pořadí je zvolíme. Pravidlo si zapíšeme následujícím způsobem: $K(k,n) = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

Kde n je počet prvků a k je počet prvků, které chceme vybrat. Ukažme si použití na již uvedené úloze se sportkou. Spočítejme, kolik kombinací čísel můžeme zvolit.
Využijme uvedeného vzorce:$n = 49, k = 6$
Po dosazení: $K(6,49) = \frac{49!}{6!\cdot(49-6)!} = 13\ 983\ 816$
Kombinací pro vsazení do sportky je 13 983 816.

Variace s opakováním

Variace s opakováním jsou podobné jako klasické variace, pouze dovolujeme, aby se prvky z množiny, ze které vybíráme, mohly opakovat.
Zápis pravidla: $V'(k,n) = n^k$
Příklady:
5. Kolik existuje pětimístných kódů?
6. Kolik čtyřmístných čísel lze sestavit z číslic 2, 4, 6, 8?
7. V tabulce 8×8 chceme obarvit některá políčka na černo a zbylá na bílo. Kolika způsoby to lze provést?

Kombinace s opakováním

Kombinace s opakováním se zase podobají klasickým kombinacím, ale zase dovolujeme, aby se prvky z množiny, ze které vybíráme, mohly opakovat.
Zápis pravidla: $K'(k,n) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\cdot k!}$
Uveďme si příklad:
Kolika způsoby lze rozdělit 20 bonbónů mezi 10 spolužáků? Je to příklad na kombinace s opakováním, protože jeden spolužák může dostat více, dokonce všechny, bonbóny. Musíme si správně určit, co je n a co k. Vybíráme 20 členné kombinace z 10 spolužáků. Takže $n = 10$ a $k = 20$. Dosazením do vzorce dostáváme výsledek 10 015 005.

Pravděpodobnost

Pravděpodobnost náhodného jevu nám říká, jak moc můžeme očekávat, že nastane daný jev. Pokud chceme spočítat pravděpodobnost jevu, platí:

$P = \frac{počet\ jevů,u\ kterých\ pravděpodobnost\ zkoumáme}{počet\ všech\ možných\ výsledků}$

Ukažme si to na příkladu. Chceme spočítat, jaká je pravděpodobnost, že pří házení kostkou nám padne dvakrát za sebou šestka? Podle pravidla součinu máme celkem 36 (6x6) uspořádaných dvojic, které mohou padnout, z nich právě jedna obsahuje dvě šestky. Pokud chceme vypočítanou pravděpodobnost převést na procenta, stačí výsledek vynásobit stem.

$P = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36} = 2,8\%$

Příklady:

8. Jaká je pravděpodobnost, že vytáhneme z balíčku 32 karet na poprvé eso? (balíček obsahuje 4 esa)

Výsledky:

1. 36
2. 8
3. $5! = 120$
4. $5! = 120$
5. $10^5 = 100\,000$
6. $4^4 = 256$
7. 2^{64}
8. $\frac{1}{8} = 12{,}5\%$

Jirka

Výsledkové listiny

Tady najdete úplnou výsledkovou listinu řešitelů.

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Adéla	Houdková	3	6	3	2	2	6	22	52
2.	Zuzana	Krčmáriková	1	6	0	0	0	5	12	31
3.	Vít	Mičkech	-	-	-	-	-	-	0	27
4.	Dalimil	Šťastný	-	6	-	-	1	6	13	23
5.	Ondřej	Beníšek	-	-	-	-	-	-	0	1

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Karel	Plášek	7	4	8	7	8	6	40	82
2.	Nikola	Razakowská	-	6	-	6	-	6	18	60
3.	Gabriela	Dvorská	-	-	-	6	-	6	12	54
4.	Martin	Mlečka	1	6	4	0	4	6	21	52
5.	Michaela	Čulíková	7	6	4	2	-	-	19	49
6.	Alexandr	Skalský	-	-	-	-	-	-	0	42
7.	Michal	Procházka	-	-	-	-	-	-	0	37
8.	Mikuláš	Hlaváček	-	-	-	-	-	-	0	32
9.	Eliška	Jordánková	2	6	4	-	-	6	18	28
10.	Eliška	Hybnerová	-	-	-	-	-	-	0	27
11.	Matouš	Řezníček	-	-	-	-	-	-	0	19
12.	Marek	Dobiáš	-	-	-	-	-	-	0	13

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Natálie	Maleňáková	7	6	8	7	8	6	42	83
2.	David	Kamenský	7	6	8	7	8	5	41	81
3.	Jiří	Močkoř	3	6	8	6	8	6	37	75
4.	Vilém	Jankovský	7	6	8	7	7	6	41	74
5.	Veronika	Krčmáriková	2	6	6	7	1	6	28	58
6.	Matěj	Martiník	-	6	4	-	8	6	24	42
7.	Vojtěch	David	-	-	-	-	-	-	0	41
8.	Karolína	Štorchová	-	-	-	-	-	-	0	26
9.	Matěj	Volf	-	-	-	-	-	-	0	12

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Alina	Mojšová	4	6	3	5	8	6	32	65
2.	Jana	Kolenovská	5	3	-	1	-	5	14	47
3.	Martina	Novotná	-	-	-	-	-	-	0	33
4.	Jan	Kačenka	7	6	-	-	-	6	19	32
5.	Jakub	Michna	7	6	8	-	0	6	27	27
6.	Adam	Křivka	-	-	-	-	-	-	0	26
7.	Erika	Vladařová	1	6	-	-	-	0	7	7