KOKOS

27.ročník ⋆ **5.leták**

Milý řešiteli, dostává se Ti do rukou poslední série 27. ročníku KoKoSu. Najdeš zde závěrečnou část příběhu, autorská řešení předchozí série a všemi očekávanou výsledkovou listinu, kde se dozvíš, jak ses umístil v celkovém pořadí všech řešitelů. Pokud nevidíš své jméno na medailových příčkách, nezoufej, příští rok, nejsi-li v 9. třídě, to můžeš zkusit znovu.

Letos je to od nás organizátorů vše. Doufáme, že si je pořádně užiješ a následující rok se znovu pustíš do řešení dalších a dalších sérií KOKOSu

Ahoj v příštím školním roce plném matematických záhad

Organizátoři

BLAHOPŘEJEME **Natálii Maleňákové**, která se se svými 148 body stává nejúspěšnější řešitelkou letošního ročníku. Těsně za ní se umístila **Klára Mořkovská** se 133 body, třetí místo obsadila **Miroslava Novoveská** se 110 body.

Blahopřejeme i jednotlivým vítězům ve svých kategoriích:

	1. místo	2. místo	3. místo
9.ročník	Klára Mořkovská	Miroslava Novoveská	Lenka Švidrnochová
8.ročník	Jana Kolenovská	Tereza Zelená	Karolína Helemiková
7.ročník	Natáli Maleňáková	Anastázie Štěpánková	Linda Onderková
6.ročník	Jiří Zelený		

Závěrečná část příběhu

Poslední den soustředění se nesl ve slavnostním duchu. Vedoucí vyhlásili vítězný tým, rozdali ceny a všichni se ze všeho nejvíc těšili na závěrečné posezení u táboráku. Ota, Jáchym a Prokop ve vítězném týmu nakonec nebyli, jejich tým byl diskvalifikován z poslední soutěže, protože se Jáchym s praporkem ztratil a ostatní týmy tudíž neměli šanci praporek najít. Nikdo z nich si ale ani v nejmenším nelámal hlavu s tím, že neskončili na prvním místě. Jediné, co ty tři zajímalo, byla záhada s neznámým zlodějem Otových sladkostí a pisatelem podivných vzkazů na papírcích. „ Musíme vymyslet plán“ uvažoval Prokop, „ jak se večer nepozorovaně vypařit“. „ Já si pro svoje jídlo jdu, a nic mě nezastaví!“ rozčiloval se Ota a zakručelo mu v žaludku. Vždycky, když déle než dvě hodiny nevzal do úst nějaké sladkosti, začínal být hladový a nervózní.

KoKoS, Gymnázium Mikuláše Koperníka, 17.listopadu 526, 743 01 Bílovec ✉

Ten večer se setmělo překvapivě rychle, nebo to možná byl jen Jáchymův pocit, vzniklý z toho, jak byl nervózní. Celý tábor se shromáždil okolo ohniště, několik lidí přineslo kytaru a zábava mohla začít. Jáchym si neuměl představit, jak se jim všem třem může podařit uniknout ze spárů vedoucích, kteří je nutili zpívat pořád další a další písně, a když pohlédl na Otu, viděl, že jeho čelisti naprázdno cvakají, jak se mu hlavou honily představy jeho ztracených sladkostí. Co budou dělat, jestli se jim nepodaří rychle zmizet? Začne Ota požírat všechny okolo?

Prokop zřejmě uvažoval o tom samém, protože znenadání obrátil oči v sloup, vyplázl jazyk na stranu a chytil se za břicho. „ Budu zvracet.“ oznámil vedoucím a kroutil se jako žížala. „ Asi jsem snědl nějaký špatný špekáček.“ „ Já jsem asi snědl ten samý,“ přidal se Ota a napodobil Prokopův výraz. Když už se oba potáceli pryč, zvedl se i Jáchym a zakoktal cosi o tom, že na ně bude dávat pozor. Nebyl si přitom jistý, jestli si vůbec kdokoliv ze zpívající skupinky jejich odchodu povšiml, protože všichni byli zabraní do hlasitého zpěvu nebo hry na kytaru.

Jakmile se všichni tři trochu vzdálili od ostatních, bez rozmyšlení se vydali do lesa. „ Pojďte za mnou, myslím, že se na tu cestu pamatuju dobře,“ řekl Jáchym a svítil baterkou před sebe. Za chvíli už starou chatrč opravdu viděli a všichni tři v ten moment mimoděk zpomalili krok. Uvnitř se nesvítilo a přední dveře byly otevřené dokořán. Zastavili se před prahem a v tom okamžiku Jáchymova baterka nadobro zhasla, takže se octli v úplné tmě. Někde pár metrů od nich zašustilo listí a něco prasklo. Prokop vyslovil nahlas to, co si mysleli všichni tři. „ Rychle pryč!“ Nikdo z nich nevěděl, že jim v tu chvíli žádné nebezpečí nehrozilo. Utíkali, co nejrychleji mohli, kličkovali mezi stromy a zanedlouho minuli dokonce i tábor, takže se brzy napojili na příjezdovou cestu, která vedla k vlakovému nádraží. Něco, ať to bylo cokoliv, je přinutilo nezastavovat, dokud se, celý udýchaní, neusadili na lavičku u budovy nádraží. Když si sedali, baterka vyklouzla Jáchymovi z ruky, upadla na zem, zablikala, a znova se rozsvítila silným žlutým světlem…

V táboře panovala uvolněná atmosféra, oheň hořel a všichni si užívali spousty dobrého jídla. Přes veselou a hlasitou hudbu nebylo slyšet kroky, které pomalu blížily z lesa.

Autorská řešení 5. série

Úloha 1.

Označme si $|A_0C|$ jako $7x$ a $|A_0B|$ jako $2x$, potom platí $|BC| = |AC| = 9x$. Dále si označme vzdálenost od bodu B k patě výšky na stranu AB (tu si označme v_a), jako y. Potom pomocí pythagorovy věty můžeme sestavit tyto 2 rovnice:

$$(9x)^2 = (7x)^2 + |A_0A|^2$$
$$(2y)^2 = (2x)^2 + |A_0A|^2$$

Když dané rovnice od sebe odečteme a upravíme tak dostaneme:

$$(9x)^2 - (2y)^2 = (7x)^2 - (2x)^2$$
$$81x^2 - 49x^2 + 4x^2 = 4y^2$$
$$9x^2 = y^2$$
$$y = 3x$$

Tímto jsme zjistily vztah x a y. Mějme zase rovnici vytvořenou z pythagorovy věty.

$$(9x)^2 = y^2 + v_(^2 6)$$
$$9y^2 = y^2 + v_(^2 6)$$
$$v_a = 2\sqrt{2} \cdot y$$
$$v_a = \sqrt{2} \cdot |AB|$$

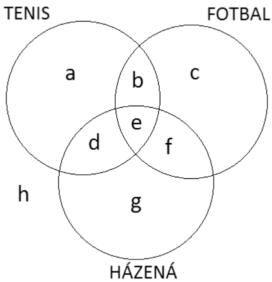
Jirka

Úloha 2.

Zaprvé si spočítáme obvod třetího kruhu, který přímo pohání pás. $O = \pi \cdot r^2$ Nyní zjistíme, o kolik stupňů se třetí kruh otočil: $\frac{9}{2} = 4,5$ Zjišťujeme tedy, že se třetí kolo otočilo 4,5× tudíž o 1620° Nyní přes složený poměr zjistím, o kolik se otočilo kolo první. $1620 \cdot 4 = 6480$ $\frac{6480}{15} = 432°$ První kolo se musí otočit o 432°, aby se pás posunul o 9 m.

Damián

Úloha 3.



Úlohu lze nejlépe vyřešit pomocí Vennova diagramu. Prvky každé kružnice znázorňují děti hrající určitý sport, např. b je množina dětí hrajících právě tenis a fotbal. Pomocí těchto písmen lehce sestavíme rovnice: Tenis hraje 32 dětí $\rightarrow a+b+d+e=32$. Fotbal $28 \rightarrow b+c+e+f=28$. Házenou $33 \rightarrow d+e+f+g=33$. Děti hrající právě dva sporty zahrnují množiny b, d, $f \rightarrow b+d+f=3a$. Tenis a zároveň fotbal hraje 8 dětí tzn. $b+e=8$, potom obdobně $d+e=15$. Děti hrající všechny tři sporty jsou 2 tzn. $e=2$, $h=10$.

$$\begin{aligned}
b+e=8 &\rightarrow b=6\\
d+e=15 &\rightarrow d=13\\
a+b+d+e=32 &\rightarrow a=11\\
b+d+f=3a &\rightarrow f=14\\
b+c+e+f=28 &\rightarrow c=6\\
d+e+f+g=33 &\rightarrow g=4
\end{aligned}$$

Celkový součet $a+b+c+d+e+f+g+h=66$ odpovídá počtu dětí na táboře.

Barča

Úloha 4.

Protože velikost úhlu CBD je $30°$, pak úhly ADB, CAD a CAB budou také velké $30°$. Úhel AYB je velký $120°$ (součet úhlů v trojúhelníku je $180°$, a proto i velikost úhlu DYC je $120°$ (vrcholové úhly). Protože je trojúhelník YCD rovnoramenný, úhly YDC a YCD jsou velké $30°$. Z toho vyplývá, že trojúhelník ACD je rovnoramenný a proto $|CD|=5cm$ z toho plyne, že $|X_1X_2|=5cm$

$$\begin{aligned}
\sin|\sphericalangle X_2BC| &= \frac{CX_2}{BC}\\
\sin 60^\circ &= \frac{|CX_2|}{5}\\
|CX_2| = 5\sin 60^\circ &= 4,33cm
\end{aligned}$$

Dosadíme-li do pythagorovy věty:

$$
\begin{aligned}
|X_2B|^2 + |X_2C|^2 &= |BC|^2 \\
|X_2B|^2 &= |BC|^2 - |X_2C|^2 \\
|X_2B|^2 &= 52 - 4,332 \\
|X_2B| &= 2,5cm
\end{aligned}
$$

Odtud víme, že:

$$|AB| = 2|X_2B| + |X_1X_2| = 10cmS = \frac{(10+5)\cdot 4,33}{2} = 32,5cm^2$$

Berča

Úloha 5.
Abychom mohli spočítat obsah celé sedmicípé hvězdy, potřebujeme znát obsah tří nevyznačených částí trojúhelníků. Označme si trojúhelník ABC. Jelikož víme, že úhel u vrcholu sedmiúhelníku je $\frac{900}{7}$, proto bude úhel u vrcholu A a B daného trojúhelníku $180 - \frac{900}{7} = \frac{360}{7}$. Z těchto údajů můžeme dopočítat délku základny (označme si ji a) trojúhelníku ABC pomocí goniometrických funkcí.

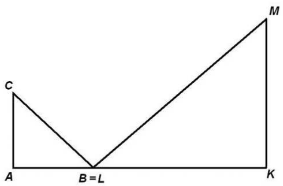
$$
\begin{gathered}
\tan\frac{360}{7} = \frac{2}{\frac{a}{2}} \\
a = \frac{4}{\tan\frac{360}{7}} \\
a = 3,1899
\end{gathered}
$$

Teď jen dopočítáme obsah trojúhelníku.

$$S = \frac{a\cdot v}{2}S = 3,1899cm^2x = 42 + 3,1899\cdot 3x = 45,1899cm^2$$

Jirka

Úloha 6.



Nejprve si uděláme náčrtek, na kterém si označíme písmeny: A = místo, kde stojí Jáchym $B = L$ = zrcátko C = Jáchymovy oči K = pata stožáru M = vrchol stožáru Trojúhelníky ABC a KLM jsou si navzájem podobné, proto můžeme říct, že $|AB| : |KL| = |AC| : |KM|$. Zároveň platí, že $|AB| + |KL| = 20$ metrů (vzdálenost Jáchyma od stožáru s vlajkou). Po dosazení čísel dostaneme $|AB| : |KL| = 12 : 1,6$. Nyní máme dvě rovnice o dvou neznámých, ze kterých po úpravách zjistíme, že vzdálenost $|AB|$, tedy vzdálenost zrcátka od Jáchymových nohou je přibližně 2,353 metrů.

Terka

Výsledkové listiny

Tady najdete výsledkovou listinu.

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	∑
1.	Jiří	Zelený	-	-	-	-	-	5	5	16

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	∑
1.	Natálie	Maleňáková	8	6	7	2	7	5	35	148
2.	Anastázie	Štěpánková	-	-	-	-	-	-	0	30
3.	Linda	Onderková	-	-	-	-	-	-	0	12

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	∑
1.	Jana	Kolenovská	2	6	3	-	0	4	15	84
2.	Tereza	Zelená	-	-	8	-	-	5	13	65
3.	Karolína	Helemiková	-	-	-	-	-	-	0	57
4.-5.	Alina	Mojšová	-	-	-	-	-	-	0	23
	Hana	Sadílková	-	-	-	-	-	-	0	23
6.	Barbora	Chlostová	-	-	-	-	-	-	0	14
7.	Alena	Bidlová	-	-	-	-	-	-	0	10

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	∑
1.	Klára	Mořkovská	3	6	-	6	7	5	27	133
2.	Miroslava	Novoveská	8	4	8	6	7	5	38	110
3.	Lenka	Švidrnochová	1	3	8	6	3	5	26	103
4.	Vanda	Kostková	-	-	-	-	-	-	0	32