KOKOS

27.ročník ⋆ **4.leták**

Milý řešiteli!

Po velmi úspěšném jarním soustředění pro Tebe připravujeme další akci, tentokrát to bude KoMa - Koperníkův Matboj. Jedná se o matematickou soutěž, kde spolu soupeří pětičlenné týmy 6. – 9. tříd a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Celá soutěž proběhne 19. června 2015 na gymnáziu v Bílovci. Pokud se chceš přihlásit a změřit síly s týmy dalších škol, podrobnější informace a přihlášku nalezneš na stránkách kokos.gmk.cz. Těšíme se na Tebe!

Zadání úloh

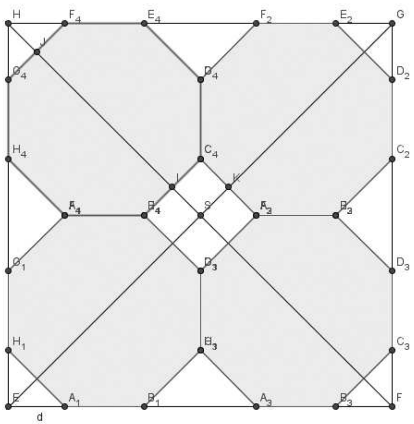
Jáchym pomalu překročil práh staré chatrče a ocitl se v malé předsíni, která byla zcela prázdná, přešel ji tedy, a otevřel další dveře na konci. Vlaječku svého týmu stále držel v ruce, a umínil si, že pokud ji má ukrýt, tak co nejlépe.

Úloha 1. (8 bodů): Vlaječka měla tvar rovnoramenného trojúhelníku. Tento rovnoramenný trojúhelník pojmenujeme ABC a platí, že$|AC| = |BC|$. Výška v_a protíná stranu BC v bodě A_0 tak, že platí: $7|A_0B| = 2|A_0C|$. Jakou délku má výška na stranu AB v závislosti na délce strany AB?

Jáchym vstoupil do další místnosti, která vypadala stejně opuštěně, jako předsíň. Nikde žádný nábytek nebo cokoliv, kam by mohl praporek umístit tak, aby nebyl vidět na první pohled. Kde nic, tu nic, jen zaprášená podlaha s ohavnými čtvercovými dlaždicemi.

Úloha 2. (6 bodů): Každá dlaždice měla tvar čtverce, ve kterém byly zobrazeny čtyři stejné pravidelné osmiúhelníky vzájemně se dotýkající a úhlopříčky toho čtverce rozdělující osmiúhelníky na poloviny (viz. obrázek). Vypočítejte obsah šestiúhelníku $IC_4D_4E_4F_4J$ a čtverce SKC_4I, pokud víte, že $|EA_1| = d = 2$cm. Odmocniny vyčíslujte až úplně na konci.

Místnost byla zřejmě jediným pokojem v domku, Jáchym totiž neviděl žádné další dveře, a tak mu nezbývalo, než umístit vlaječku někde na zem, koneckonců, ani tak pro ostatní týmy nebude lehké se k ní dostat. A najednou, když přejel pohledem celou místnost, si všiml, že na zemi je kousek od něj jedna z velikých dlaždic označená červeným křížkem, jako by na ni někdo udělal znamení. Bez rozmyšlení udělal pár kroků, aby mohl stoupnout na vyznačené místo, ale to se hned ukázalo jako sebevražedný nápad. Dlaždice se totiž v tom okamžiku prudce pohnula a Jáchym se i s ní propadl někam do tmy. To poslední, co stačil udělat, bylo hlasitě a překvapeně vykřiknout.

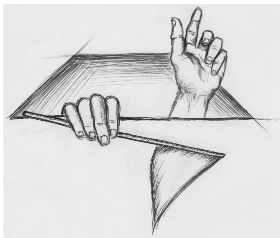


Toho samého dne, o dvě hodiny později, už byly všechny ostatní děti i všechny ostatní praporky zpátky v táboře a vedoucí po porovnání časů vyhlásili vítězný tým. Samozřejmě vyhrálo družstvo Jáchyma, Oty a Prokopa, protože jejich vlaječku nikdo nenašel, jenže brzy nastal problém. „Chceme vědět, kde jste vlaječku ukryli, že ji nikdo nemohl najít“ naléhaly ostatní týmy, ale Ota jen pokrčil rameny. „To jsem měl na starost já a Jáchym. Jenže Jáchym pořád šel moc rychle, a nakonec se mi úplně ztratil.“ „Do konce hry už jsme ho nenašli“ dodal Prokop znepokojeným tónem. „Mysleli jsme, že se třeba vrátil sem, když nás nemohl najít.“ „A to říkáte jen tak?“ utrhli se na ně vedoucí. „Hned běžte a podívejte se do všech stanů, jestli tu Jáchym už je!“

Zatímco Prokop, Ota a i pár dalších dětí se pustilo do hledání, vedoucí připravovali program na další den, který měl zahrnovat soutěže ve sportu.

Úloha 3. (8 bodů): Na soustředění byl proveden průzkum ohledně sportů. Bylo zjištěno, že: Tenis hraje 32, fotbal 28 a házenou 33 dětí. Počet dětí hrajících právě 2 sporty je třikrát větší než počet dětí hrajících pouze tenis. Tenis a zároveň fotbal hraje 8 dětí, tenis a zároveň házenou 15 dětí. Všechny 3 sporty hrají 2 děti, žádný sport 10 dětí. Kolik dětí je na soustředění?

Po chvíli je přerušil v obličeji bledý Prokop, který přiběhl říct, že Jáchym v táboře není. Vedoucí urychleně poslali všechny do stanů a vyrazili do lesa Jáchyma hledat.

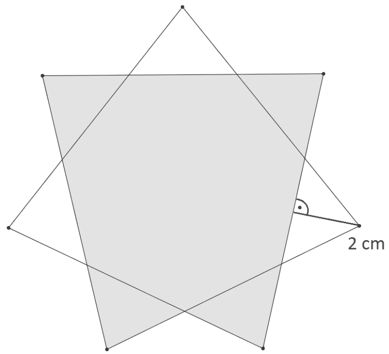


Jáchym zatím tápal ve tmě, kde se znenadání ocitl. Nacházel se kdesi pod lesní chatrčí a jediné, co mu poskytovalo trochu světla, byl nevelký čtvercový otvor nad jeho hlavou. Před sebou viděl několik metrů úzké chodby, která prudce zatáčela doleva. Jáchym se vydal tím směrem. Po chvíli opatrné chůze, kdy už neviděl ani na krok před sebe, prudce zakopl o hromadu něčeho na zemi a když sebou praštil, něco ztlumilo jeho náraz. Něco povědomého. „To jsou Otovy zmizelé sladkosti!“ poznal Jáchym a zvedl ze země známý sáček gumových medvídků. Už si byl zcela jistý – o kousek dál nahmatal hromádku švestkových perníků a po levé ruce měl otevřený sáček s velkými karamelovými bonbóny. A protože už hodně dlouho nic nejedl, začal hned jeden veliký bonbón rozbalovat.

Úloha 4. (6 bodů): Přední strana bonbónu má tvar rovnoramenného lichoběžníku. V tomto lichoběžníku, který si označíme $ABCD$ s podstavami AB a DC, jsou dány úhly $|\sphericalangle BAD| = 60°$, úhel $|\sphericalangle CBD| = 30°$ a délka strany AD je 5cm. Urči obsah tohoto lichoběžníku.

Potom, co Jáchym spořádal celý pytlík karamel, pustil se do Otových domácích perníků, které mu nejspíš zbyly ještě z Vánoc. Byly mezi nimi totiž vánoční stromečky, sněhuláci, a největší perník měl tvar hvězdy.

Úloha 5. (7 bodů): Jáchym měl pravidelnou sedmicípou hvězdu. Zajímalo ho, jestli by dokázal spočítat obsah celé hvězdy, pokud zná pouze obsah vybarvené části, který je $42cm^2$, a délku vyznačené výšky, která je 2 cm. Mohlo se to Jáchymovi podařit, a pokud ano, jaký je obsah celé hvězdy?



Jáchym se právě chystal dát si ještě čokoládovou tyčinku a otevřít balíček skořicových sušenek, když zaslechl podivný zvuk. Něco jako vrzání dveří? Zůstal zticha a naslouchal zvuku kroků, které jako by se ozývaly někde nad ním. Někdo právě vešel do chatrče! Jáchym vyskočil na nohy, nechal zbytek sladkostí, kde byly, a vyrazil dál úzkou chodbou před ním. Utíkal, jak nejrychleji to bylo ve tmě možné a zanedlouho, k jeho nesmírné úlevě, uviděl první záblesky světla. Chodba za zatáčkou vedla prudce nahoru, a když odhrnul několik kořenů a větví, ocitl se znova na čerstvém lesním vzduchu. Rozhlédl se okolo a nedaleko spatřil táborovou vlajku.

Úloha 6. (5 bodů): Jak daleko na zem od svých nohou by Jáchym musel umístit zrcátko rovně, aby v něm viděl vrchol stožáru s vlajkou vysokého 12 metrů, pokud k němu stojí čelem? Výška Jáchymových očí nad vodorovnou zemí je 160 cm. Stožár je vzdálený 20 metrů.

Všichni vedoucí si opravdu oddychli, že se Jáchym vrátil, i když o svém zážitku řekl jenom Prokopovi s Otou. „To by mě zajímalo, kdo si schovává v podzemí všechny moje sladkosti,“ přemýšlel Ota a zatvářil se smutně při vzpomínce na své skořicové sušenky. „Zítra to můžeme zjistit“ navrhl Prokop. „Jestli se nám povede na chvíli se vytratit, půjdeme se podívat všichni.“ Ota s tím okamžitě souhlasil, ale Jáchym neříkal nic. Vzpomněl si na kroky někoho neznámého, které toho dne slyšel, a byl rád, že se mu podařilo jim uniknout.

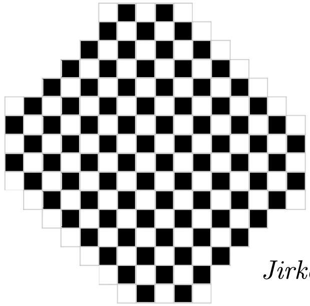
Řešení úloh 4. série posílejte do ***16.06.2014*** *na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 01 Bílovec

Autorská řešení 3. série

Úloha 1.

Když si danou šachovnici vybarvíme černou a bílou tak jako normální šachovnici 8×8 a spočítáme si počet bílých a černých polí zjistíme, že černých polí je o 4 více než bílých. Jelikož každé domino, které položíme na šachovnici, bude ležet na jednom černém a na jednom bílém políčku, proto se Jáchymovi nemůže povést šachovnici vyskládat.



Jirka

Úloha 2.

V prvním kroku si určíme rozmezí palindromů. Nejmenší čtyřmístné číslo je 1000 a největší 9999. Palindromy mohou být v rozmezí od $3 \cdot 1000 + 42 = 3042$ do $3 \cdot 9999 + 42 = 30039$. Teď budeme hledat všechny palindromy v daném rozmezí od, kterých když odečteme 42, budou dělitelné třemi. Jelikož je číslo 42 dělitelné třemi, proto hledaný palindrom musí být taky dělitelný třemi. Stačí si jenom najít všechny palindromy od 3042 do 30039, jejichž ciferný součet je dělitelný třemi. Když je jednoduše spočítáme zjistíme, že čtyřmístných palindromů dělitelný třemi je 23 a pětimístných je 67, proto celkový počet možných hledaných čísel je 90.

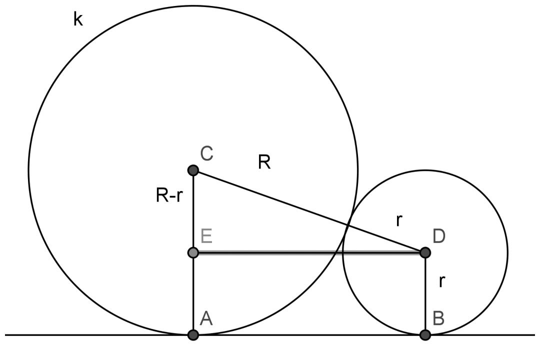
Nagy

Úloha 3.

R = poloměr k, r = poloměr l. Jestliže spojíme středy kružnic, dostaneme úsečku o délce $R+r$. Vzniká nám pravoúhlý trojúhelník o odvěsnách AB, $R-r$ a přeponě $R+r$. Podle Pythagorovy věty platí:

$$\begin{aligned} |AB|^2 + (R-r)^2 &= (R+r)^2 \\ 8^2 + R^2 - 2Rr + r^2 &= R^2 + 2Rr + r^2 \\ 4Rr &= 64 \\ Rr &= 16 \end{aligned}$$

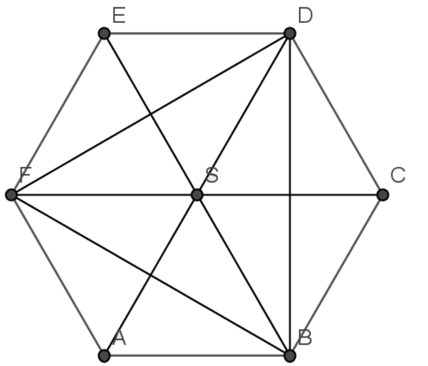
A protože poloměry jsou celočíselné, nabývají hodnot 1 a 16 cm, 2 a 8 cm nebo 4 a 4 cm.



Barča

Úloha 4.

Z obrázku je vidět, že obsah trojúhelníku ASF je $\frac{1}{6}$ obsahu šestiúhelníku. Jelikož jsou trojúhelníky FSE a ESD rovnostranné můžeme říct, že $|FS| = |SD| = |ED| = |EF|$ a $|\sphericalangle FED| = |\sphericalangle FSD|$, tudíž jsou trojúhelníky FSD a FED shodné. Z obrázku vidíme, že i obsah trojúhelníku FSD je $\frac{1}{6}$ obsahu šestiúhelníku. $S_{FSA} + S_{FSD} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} = S_{ADF}$. Obsah trojúhelníku ADF tvoří 33% obsahu šestiúhelníku $ABCDEF$.



Berča

Úloha 5.
Jáchym:

$$v_p = 5\frac{km}{h}$$

Ota:

$$t_1 = 30s$$
$$v_1 = 7\tfrac{km}{h} = 1,94\tfrac{m}{s}$$
$$t_2 = 1min$$
$$v_2 = 3\tfrac{km}{h} = 0,83\tfrac{m}{s}$$

Abychom zjistili, jestli a kdy Ota dožene Jáchyma, musíme si spočítat Otovu průměrnou rychlost

$$v_p = \tfrac{\delta s}{\delta t}$$
$$s_1 = v_1 \cdot t_1 = 58,3m$$
$$s_2 = v_2 \cdot t_2 = 50m$$
$$\delta t = 90s$$
$$\delta s = 108,3m$$
$$v_p = \tfrac{\delta s}{\delta t} = 1,2\tfrac{m}{s} = 4,3\tfrac{km}{h}$$
$$4,3\tfrac{km}{h} < 5\tfrac{km}{h}$$

Ota Jáchyma nikdy nedožene.
Pozn. δs je celkouvou dráhu a δt celkový čas.

Kika

Úloha 6.
Jelikož je hledaný šestimístný kód dělitelný pěti a zároveň dvěma můžeme říct, že na místě jednotek bude 0. Taky bude dané číslo dělitelné čtyřmi, proto na místě desítek může být číslice 2, 4, 6, 8 nebo 0. Dále musí být to číslo dělitelné třemi, proto ciferný součet bude dělitelný třemi. Jelikož hledáme nejmenší číslo s danými vlastnostmi, budeme doplňovat na místa stovek až statisíců číslici 1. Teď jasně vidíme, že nejmenší číslo s danými vlastnostmi je 111120.

Adam

Věty o trojúhelníku

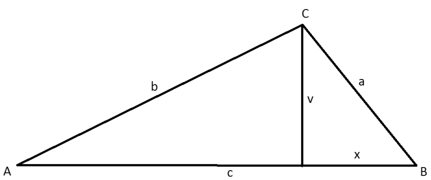
Heronův vzorec

Heronův vzorec

Heronův vzorec není přímo věta o trojúhelnících, je to ale poměrně užitečný vzorec a na některých základních školách se o něm bohužel vůbec nezmíní. Pomocí Heronova vzorce můžeme spočítat obsah trojúhelníku bez toho, abychom znali jeho výšku - stačí nám znát délku všech jeho stran. Vzorec je použitelný v libovolném obecném trojúhelníku. Vzorec sice funguje i v pravoúhlém trojúhelníku, ale použití je v tomto případě zbytečné, protože u každého pravoúhlého trojúhelníku je jedna strana zároveň výškou. Heronův vzorec je:

$$S = \sqrt{s \cdot (s–a) \cdot (s–b) \cdot (s–c)}$$

Kde $s = \frac{a+b+c}{2}$, což je poloviční obvod trojúhelníku. Tento vzorec jde jednoduše odvodit pomocí Pythagorovy věty: Máme různostranný trojúhelník: Označme x vzdálenost vrcholu B od paty výšky na stranu c. Pro ostroúhlý trojúhelník na obrázku platí:



$$x^2 + v^2 = a^2 \qquad (1)$$
$$(c - x)^2 + v^2 = b^2 \qquad (2)$$

Odečteme-li od druhé rovnice první, dostaneme:

$$c^2 - 2cx = b^2 - a^2$$

Vyjádříme x:

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$$

Jestliže za x dosadíme do první rovnice, získáme výšku v:

$$\begin{aligned}
v^2 &= a^2 - x^2 \\
v^2 &= a^2 - (\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c})^2 \\
v^2 &= a^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4c^2} \\
v^2 &= \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4c^2} \\
v &= \frac{\sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}}{2c}
\end{aligned}$$

Dosadíme-li výšku v do vzorce pro obsah trojúhelníku: $S = \frac{c \cdot v}{2}$ dostaneme:

$$S = \frac{\sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}}{4}$$

Po úpravě a dosazení $2s = a + b + c$ dostaneme:

$$S = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$$

Jirka

Výsledkové listiny

Tady najdete výsledkovou listinu všech řešitelů.

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Jiří	Zelený	-	-	-	5	-	-	5	11

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Natálie	Maleňáková	9	8	6	5	5	4	37	113
2.	Anastázie	Štěpánková	-	-	-	-	-	-	0	30
3.	Linda	Onderková	-	-	-	-	-	-	0	12

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Jana	Kolenovská	-	4	0	5	5	5	19	69
2.	Tereza	Zelená	-	-	7	5	-	5	17	52
3.	Karolína	Helemiková	-	-	0	-	-	-	0	37
4.-5.	Alina	Mojšová	-	-	-	-	-	-	0	23
	Hana	Sadílková	-	-	-	-	-	-	0	23
6.	Barbora	Chlostová	-	-	-	-	-	-	0	14
7.	Alena	Bidlová	-	-	-	-	-	-	0	10

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Klára	Mořkovská	3	6	7	5	5	5	31	106
2.	Lenka	Švidrnochová	5	7	1	5	5	5	28	77
3.	Miroslava	Novoveská	4	9	7	5	5	5	35	72
4.	Vanda	Kostková	-	-	-	-	-	-	0	32