KOKOS

27.ročník ⋆ **3.leták**

Milý řešiteli!

Ahoj milý řešiteli, před námi je už jen druhé pololetí a spolu s ním ti přinášíme novou sérii plnou dalších zajímavých příkladů prolínajících se s napínavým a strhujícím příběhem. Co se týče novinek od nás organizátorů, tak do dvou týdnu můžeš na našich stránkách *www.kokos.gmk.cz* najít předběžné informace o nadcházejícím jarním soustředění a samozřejmě i přihlášku. Tak neváhej a registruj se ihned.

Zadání úloh

Ota, odhodlaný vypátrat záhadného zloděje jeho zásob sladkostí a pisatele záhadných vzkazů, systematicky navštěvoval ostatní stany a mnohdy ani nečekal na povolení ostatních účastníků tábora, když jim začal prohledávat věci. Díky tomu se také už stačil dostat do konfliktu s Čeňkem, který odmítal Otovi ukázat obsah své krabice s jídlem, protože se bál, že by mu Ota všechny zásoby snědl.

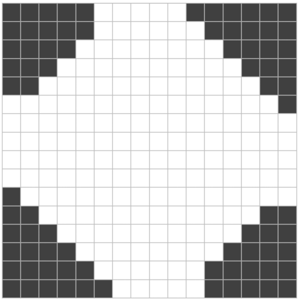
Jáchym s Prokopem trávili dopoledne ve stanu a do Otova hledání se raději nezapojovali.

Úloha 1. (9 bodů): Jáchym, který se náramně nudil, si vzal svou papírovou šachovnici 16×16 a zkoušel ji vyskládat dominem tak, aby domino obsadilo všechna políčka na šachovnici. Po chvilce za ním přišel Prokop a pokusil se mu to ztížit tak, že od šachovnice odstřihl políčka vyznačená černě (obr. níže) a zeptal se Jáchyma, jestli to teď zvládne vyskládat jako předtím. Může se to Jáchymovi podařit?

Jáchyma se dost dotklo, že mu Prokop bez dovolení rozstříhal jeho šachovnici a uchýlil se proto ke své oblíbené zábavě – hraní si se svým tajným oblíbeným číslem. Nikdy své oblíbené číslo nikomu neprozradil, protože si ho hodlal nechat jen a jen pro sebe, a rád se při dlouhých chvílích bavil tím, že přicházel na různé jeho nové vlastnosti.

Úloha 2. (9 bodů): Jáchym si hrál se svým oblíbeným čtyřmístným číslem a zjistil, že má takovou vlastnost, že když ho vynásobí třemi a přičte 42 tak vznikne palindrom (číslo, které se ve svém desítkovém zápisu čte stejně zepředu i zezadu, např. 4567654). Kolik čísel by mohlo být Jáchymovým oblíbeným číslem?

KoKoS, Gymnázium Mikuláše Koperníka, 17.listopadu 526, 743 01 Bílovec ✉



Odpoledne účastníky tábora čekala další velká hra. Tým, kde byli Prokop, Jáchym a Ota, se po vítězství v poslední soutěži držel na první místě, to ale ještě nic neznamenalo. Vedoucí rozdali postupně všem týmům po jednom barevném praporku. Úkolem každého týmu bylo ukrýt svůj praporek v lese co nejlépe, aby jej ostatní týmy nenašly a zároveň najít co nejvíce ostatních praporků. Ota a Jáchym byli vylosováni jako zástupci svého týmu, kteří mají praporek ukrýt. Ostatní zatím dostali úlohy, které museli vypočítat a až po jejich dokončení vyrazit do lesa. Celý tým kromě Oty a Jáchyma, kteří už zmizeli v lese, začal diskutovat o prvním úkolu.

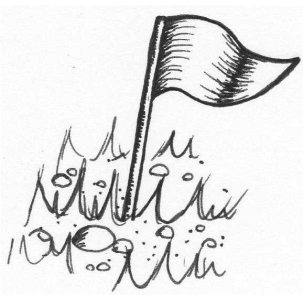
Úloha 3. (7 bodů): Kružnice k, l se dotýkají společné tečny ve dvou bodech A, B, přičemž jsou to kružnice s vnějším dotykem. Jakých celočíselných hodnot mohou nabývat poloměry těchto kružnic, jestliže $|AB|=$ 8cm?

Když na to konečně přišli, otrávilo je, že i další příklad je z geometrie. Ale nedalo se nic dělat.

Úloha 4. (5 bodů): Máme pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$, ve kterém je trojúhelník ADF. Vypočti procentuální obsah tohoto trojúhelníku v šestiúhelníku.

Jáchym a Ota se zpočátku jen tak potulovali sem a tam po lese a ani jednoho z nich nenapadalo nějaké dobré místo, kde by jejich soupeři vlaječku nenašli. Nakonec se napojili na úzkou lesní pěšinu, po které kráčeli hlouběji mezi stromy. „No tak dělej," brblal Jáchym, kterému se nelíbilo, jak se Ota loudá. „Musíme se ztratit ostatním týmům, jinak bude náš úkryt hned prozrazený." „Já už ale fakt nemůžu, kdybys pořád nešel tak rychle!" vztekal se Ota a sotva dýchal. „Pojďme si dát na chvíli pauzu!" Jáchym už toho měl tak akorát po krk. „Klidně si tady dej přestávku sám, ale já jdu dál." „Tak dobře" oddechl si Ota a rozvalil se na pařez na okraji pěšiny. „Jenom si na chvilku sednu a hned tě doženu, neodbočuj z té cestičky."

Úloha 5. (5 bodů): Jáchym a Ota jdou lesem. Po nějaké době se Ota unaví a na 15 minut se zastaví, aby si odpočinul. Jáchym mezitím pokračuje svižnou chůzí rychlostí $5\frac{km}{h}$ Když se Ota vydá znova na cestu, nejprve běží rychlostí $7\frac{km}{h}$, kterou ale zvládne udržet jen 30 s a další 1 minutu musí pokračovat rychlostí $3\frac{km}{h}$. Toto pořád opakuje. Za jak dlouho Ota Jáchyma dožene?



Ota už ale Jáchyma nikdy nedohnal. Ten totiž z plánované stezky odbočil, když ho znenadání napadlo něco geniálního, na co nedokázal přestat myslet. „Tady někde byla ta stará chatrč!" vzpomněl si, a co nejrychleji vyrazil směrem, o kterém se domníval, že k lesnímu domku vede. Jeho odhad byl správný, zanedlouho se před ním chatrč opravdu vynořila a on už byl rozhodnutý ukrýt praporek někde uvnitř. Zapomněl na strach i na to, kde nechal svého kamaráda a chtěl si otevřít dveře do domku, jenže to nešlo. Neměly totiž žádnou kliku. Místo toho uprostřed svítila obrazovka a pod ní byla seřazena tlačítka s číslicemi. Jáchym se zarazil nad tím, že se právě tady setkal s tak neobyčejným způsobem zabezpečení. Ještě než ale začal přemýšlet nad správnou kombinací čísel, všiml si drobného papírku, který se mu povaloval pod nohama. „Další vzkaz!" pomyslel si a měl pravdu. Zdálo se, že ten, kdo záhadné vzkazy píše, ať už to byl kdokoliv, se mu tentokrát snaží pomoct. Na papírku totiž Jáchym našel nápovědu, jak dveře do chatrče otevřít.

Úloha 6. (5 bodů): Kódem je nejmenší šestimístné číslo, pro které platí, že je dělitelné čísli 1, 2, 3, 4, 5, 6 a součástí tohoto čísla jsou dvě sudé číslice. O jaké číslo se jedná?

Najít odpověď Jáchymovi netrvalo dlouho. Jakmile naťukal správnou kombinaci čísel, dveře se samy se zavrzáním otevřely.

*Řešení úloh 3. série posílejte do **7.4.2013** na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 01 Bílovec

Autorská řešení 1. série

Úloha 1.

V první polovině testu bylo 84% odpovědí správných – vypočítáme jejich počet ($25 \cdot 84 : 100 = 21$). Správné a špatné odpovědi byly v poměru $7 : 1$, to znamená, že špatně Jáchym v první polovině zodpověděl tři otázky a jednu otázku vynechal. Dopočítáme, že v první polovině celkem získal 132 bodů ($21 \cdot 7–3 \cdot 5 = 132$), to znamená, že v druhé části získal $158 – 132 = 26$ bodů. Ve druhé polovině je poměr správných a špatných $4 : 3$. Můžeme sestavit rovnici: $4x \cdot 7–3x \cdot 5 = 26$. Z té zjistíme, že $x = 2$. Počet správných odpovědí je tedy roven: $4 \cdot 2 = 8$, počet špatných: $3 \cdot 2 = 6$. Nezodpovězené otázky ve druhé polovině dopočítáme jako: $25–(8+6) = 11$. Přičteme 1 nezodpovězenou z první poloviny testu a máme celkem 12 otázek, na které Jáchym neodpověděl.

Terka

Úloha 2.

Ze zadání nám vyplývá, že máme zjistit tyto úhly, přičemž obrazec se skládá ze šesti čtverců. Řešení je mnoho, ale vezeme si třeba tyto dva trojúhelníky. Podle pythagorovy věty spočítáme, že dráhy jsou 50 a 70 km. Protože jsou v poměru 5:7 a čas je stejný, zjistíme rychlosti tak, že 50 a 70 vynásobíme stejným číslem. Toto číslo má ale dlouhý desetinný rozvoj, takže by bylo složité ho najít. Bude nám stačit, když najdeme největší násobek 7 menší než 100 (tj. 98). Toto číslo vydělíme 7 a výsledkem vynásobíme 5. Vyjdou nám tak rychlosti $v_1 = 70\frac{km}{h}$ a $v_2 = 98\frac{km}{h}$. Teď už jen vypočítáme čas, který jeli (to je asi 42 min, 51s). Takže se setkají v 8h 42 min 51 s.

Berča

Úloha 3.

Označíme si dobu pauzy jako x. Ze vztahu $s_1 = s_2$ dostáváme $v_1 = v_1 \to v_1 \cdot (2 - 3x) = v_2 \cdot (2-x)$, kde 2h jsou celkový čas jízdy. Máme tedy: $20 \cdot (2-3x) = 10 \cdot (2-x)$, x je tedy rovno $\frac{2}{5}$. $\frac{2}{5}$h je doba odpočinku druhého cyklisty, takže známe čas i rychlost a můžeme vypočíst dráhu: $s = 10 \cdot (2 - \frac{2}{5}) = 16$ km.

Barča

Úloha 4.

Jáchym musí vždy šachovnici rozpůlit. Po spočítání všech použitých pěšáků dostaneme číslo 56.

Adam

Úloha 5.

Celkem 5 kelímků: 2 kelímky - 8 bílých a 2 černé 3 kelímky – 6 bílých a 4 černé

Odebírají se buď 2 bílé nebo 1 černá.

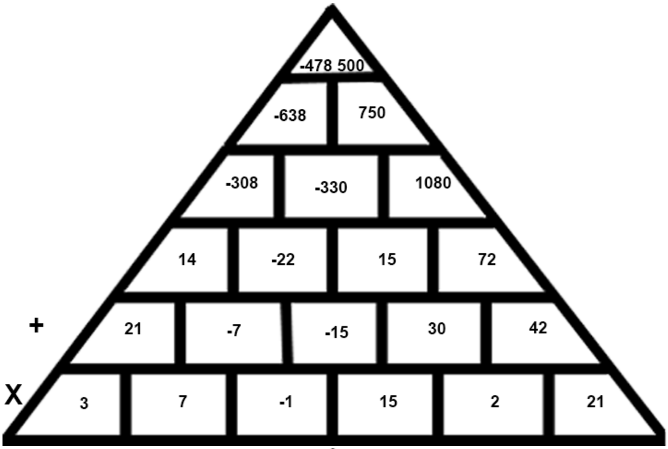
Vyhrává ten, jenž odebere poslední kuličku a začíná Čeněk.

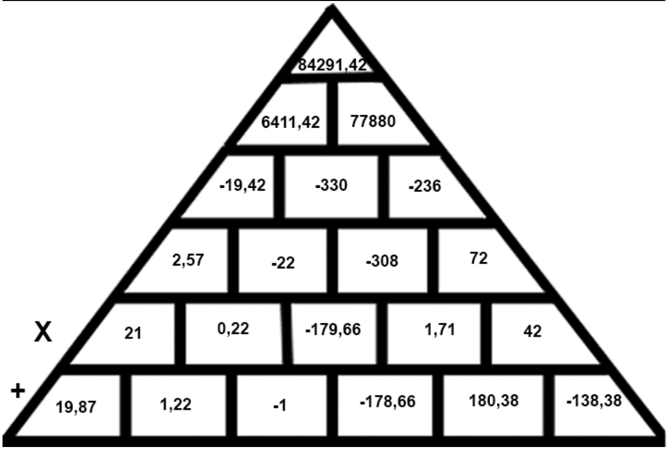
34 bílých a 16 černých kuliček celkem.

17x se odeberou bílé a 16x černé, z čehož vyplývá, že celkový počet tahů je 33, což je lichý počet, takže vyhraje Čeněk, neboť má lichý tah.

Jirka

Úloha 6.


-478 500
-638
750
-308
-330
1080
14
-22
15
72
+
21
-7
-15
30
42
X
3
7
-1
15
2
21


84291,42
6411,42
77880
-19,42
-330
-236
2,57
-22
-308
72
X
21
0,22
-179,66
1,71
42
+
19,87
1,22
-1
-178,66
180,38
-138,38

Kika

Věty o trojúhelnících 2

V tomto díle $\pi\rho h$u si řekneme o dalších větách o trojúhelnících.

Tangentová věta

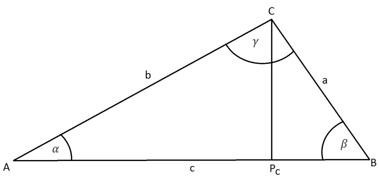
Tato věta vyjadřuje vztah mezi délkami stran a velikostmi úhlů v obecné trojúhelníku. Tangentová věta říká, že pro každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ a stranami a, b, c platí:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cot\frac{\gamma}{2}}$$

$$\frac{b-c}{a+b} = \frac{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}}{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}} = \frac{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cot\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{c-a}{a+b} = \frac{\tan\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\tan\frac{\gamma+\alpha}{2}} = \frac{\tan\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\cot\frac{\beta}{2}}$$

Odvození je poměrně složité:



V důkazu využijeme sinovu větu a vzorce pro goniometrické funkce. Sinovu větu využijeme hned v prvních úpravách, kde pomocí ní vyjádříme délku strany a a b. Na poslední tři kroky potřebujeme znát vzorce goniometrických funkcí, tyto vzorce jsou poměrně složité na důkaz, proto si jejich důkaz zde ukazovat nebudeme.

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\frac{b\cdot\sin\alpha}{\sin\beta} - \frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha}}{\frac{b\cdot\sin\alpha}{\sin\beta} + \frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha}} = \frac{\frac{b\cdot\sin^2\alpha - a\cdot\sin^2\beta}{\sin\beta\cdot\sin\alpha}}{\frac{b\cdot\sin^2\alpha + a\cdot\sin^2\beta}{\sin\beta\cdot\sin\alpha}} = \frac{b\cdot\sin^2\alpha - a\cdot\sin^2\beta}{b\cdot\sin^2\alpha + a\cdot\sin^2\beta} = \frac{b\cdot\frac{v^2}{b^2} - a\cdot\frac{v^2}{a^2}}{b\cdot\frac{v^2}{b^2} + a\cdot\frac{v^2}{a^2}} =$$

$$= \frac{v\cdot\sin\alpha - v\cdot\sin\beta}{v\cdot\sin\alpha + v\cdot\sin\beta} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{2\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}} =$$

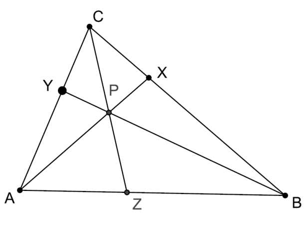
$$= \frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cot\frac{\gamma}{2}}$$

Čèvova věta

Čèvovu větu používáme hlavně na dokazování, že se tři úsečky v trojúhelníku (např. těžnice) protínají v jednom bodě. Čèvova věta je:

$$1 = \frac{|AZ|\cdot|BX|\cdot|CY|}{|ZB\cdot|XC|\cdot|YA|}$$

Pokud platí vztah udávány čèvovou větou, potom se dané tři úsečky protínají v jednom bodě. Důkazů této věty existuje více, jeden z nich je důkaz pomocí poměru obsahů. Mějme trojúhelník ve, kterém jsou tři úsečky protínající se v jednom bodě. Kde P je průsečík úseček a body X, Y, Z jsou tvořeny průsečíkem úsečky a strany kterou protne.



Podle obrázku si vyjádříme obsahy trojúhelníků AZC a AZP, jejich rozdílem zjistíme obsah trojúhelníku APC. To samé si vyjádříme u obsah trojúhelníku ZBC od něho odečteme obsah trojúhelníku ZBP a zůstane mi obsah trojúhelníku PBC. Poměr obsahů trojúhelníku APC a PBC je stejný jako poměr $\frac{|AB|}{|BC|}$.

$$S_{AZC} = |AZ| \cdot \frac{v}{2}$$
$$S_{AZP} = |AZ| \cdot \frac{v-x}{2}$$
$$S_{APC} = S_{AZC} - S_{AZP} = |AZ| \cdot \frac{v}{2} - |AZ| \cdot \frac{v-x}{2} = |AZ| \cdot \frac{x}{2}$$

$$S_{ZBC} = |BZ| \cdot \frac{v}{2}$$
$$S_{ZBP} = |BZ| \cdot \frac{v-x}{2}$$
$$S_{PBC} = S_{ZBC} - S_{ZBP} = |BZ| \cdot \frac{v}{2} - |BZ| \cdot \frac{v-x}{2} = |BZ| \cdot \frac{x}{2}$$

$$\frac{S_{APC}}{S_{PBC}} = \frac{S_{AZC} - S_{AZP}}{S_{ZBC} - S_{ZBP}} = |AZ| \cdot \frac{x}{2} |BZ| \cdot \frac{x}{2} = \frac{|AZ|}{|BC|}$$

Tento postup zopakujeme:

$$\frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{S_{ABX} - S_{PBX}}{S_{AXC} - S_{PXC}} = \frac{|BX| \cdot \frac{x}{2}}{|XC| \cdot \frac{x}{2}} = \frac{|BX|}{|XC|}$$
$$\frac{S_{PBC}}{S_{ABP}} = \frac{S_{YBC} - S_{YPC}}{S_{ABY} - S_{APY}} = \frac{|CY| \cdot \frac{x}{2}}{|YA| \cdot \frac{x}{2}} = \frac{|CY|}{|YA|}$$
$$\frac{|AZ| \cdot |BX| \cdot |CY|}{|ZB| \cdot |XC| \cdot |YA|} = \frac{S_{APC} \cdot S_{ABP} \cdot S_{PBC}}{S_{PBC} \cdot S_{APC} \cdot S_{ABP}} = 1$$

Teď jsme si ukázali, proč platí vztah udávaný čevovou větou. Na závěr si ukážeme, jak pomocí této věty dokážeme, že se těžnice protínají v jednom bodě. Jelikož těžnice je spojnice středu strany s opačným vrcholem, proto body X, Y, Z budou ležet přesně v polovině strany, a proto platí že $|AZ| = |BZ|$, $|BX| = |XC|$, $|CY| = |YA|$. Pokud dosadím do čevovy věty dané rovnosti tak se mi všechny délky vykrátí a zůstane mi 1.

Jirka

Výsledkové listiny

Tady najdete úplnou výsledkovou listinu řešitelů.

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	∑
1.	Jiří	Zelený	-	-	-	-	-	4	4	6

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	∑
1.	Natálie	Maleňáková	6	6	5	7	8	4	36	76
2.	Anastázie	Štěpánková	-	-	-	-	-	-	0	30
3.	Linda	Onderková	-	-	-	-	-	-	0	12

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	∑
1.	Jana	Kolenovská	6	6	5	-	8	7	32	50
2.	Karolína	Helemiková	6	6	5	8	8	4	37	37
3.	Tereza	Zelená	6	-	5	-	-	4	15	35
4.-5.	Alina	Mojšová	6	1	0	3	8	5	23	23
	Hana	Sadílková	-	2	5	8	8	-	23	23
6.	Barbora	Chlostová	-	-	-	-	-	-	0	14
7.	Alena	Bidlová	-	-	-	-	-	-	0	10

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Klára	Mořkovská	6	6	5	8	8	5	38	75
2.	Lenka	Švidrnochová	6	3	5	8	8	3	33	49
3.	Miroslava	Novoveská	6	6	5	8	8	4	37	37
4.	Vanda	Kostková	-	-	-	-	8	5	13	32