KOKOS

27.ročník ⋆ **2.leták**

Milý řešiteli!

Taky se doma nudíš za chladných podzimních večerů? Nezoufej, přinášíme ti totiž další sérii KoKoSu. Čeká na tebe pokračování příběhu, sada matematických úloh a také Piroh, který naváže na kvadratické rovnice z minulé série. Tak už na nic nečekej a dej se do řešení.

Zadání úloh

Sluneční paprsky začaly pozvolna pronikat skrz plachty táborových stanů a probouzet ty, jejichž spánek nebyl tak hluboký. Ota, který k takovým lidem nepatřil, hlasitě chrápal, rozvalený přes dobrou polovinu stanu, který sdílel s Prokopem a Jáchymem. Jáchym už byl díky Otově chrápání nějakou chvíli vzhůru, a proto na rozdíl od ostatních dvou, nebyl nijak zaskočený, když do stanu vpadl jeden z vedoucích, aby je probudil na rozcvičku před snídaní. Po snídani všechny účastníky matematického tábora čekal krátký test, ze kterého mohli získat důležité body pro své týmy.

Úloha 1. (6 bodů): Jáchym psal 50-ti otázkový test, kde se za každou správnou odpověď přičítalo 7 bodů, za špatnou 5 odečítalo a nezodpovězené otázky neměly na body vliv. V první půlce testu byl poměr správně a špatně zodpovězených otázek 7:1, ve druhé 4:3. V první polovině Jáchym správně odpověděl 84% a jeho celkové skóre z testu bylo 158 bodů. Na kolik otázek Jáchym neodpověděl?

Jáchym si s testem poradil rychle, měl ho hotový dřív než všichni ostatní. Ota odevzdal test skoro hned po něm, ale Prokop se hned na začátku zasekl u úlohy, se kterou nemohl pohnout.

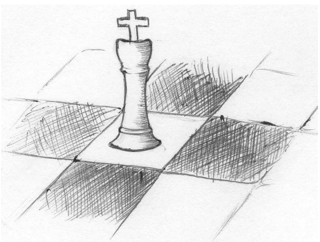
Úloha 2. (6 bodů): Dvě auta (a1 a a2) jedou po cestách, které tvoří pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C a velikosti odvěsen b=40 km, a=30 km. Obě auta vyjela z bodu A v 8:00. a1 jede po přeponě, a2 po odvěsnách trojúhelníku. Setkají se ve stejnou dobu v bodě B. Jakými největšími celočíselnými rychlostmi mohou jet, pokud ani jedno auto nepřekročí rychlost 100 km/h? V kolik hodin se setkají?

Po obědě celý tábor odpočíval, jen Ota byl stále jako na trní, protože se v poledne dost nenajedl a povedlo se mu přemluvit jednoho z vedoucích, aby s ním zajel do nejbližší vesnice, kde si Ota chtěl nakoupit vlastní zásoby jídla. V táboře naštěstí byla k dispozici dvě stará kola, která měla v případě nouze sloužit jako doprava pro pomoc. Vedoucí sice nechtěl uznat Otův stav jako nouzový, ale nakonec s výletem neochotně souhlasil, a tak oba nasedli na kola.

Úloha 3. (5 bodů): Na shodné trase jel první cyklista rychlostí 20km/h, druhý 10km/h. Oba dva odpočívali, ale první cyklista 3× déle než druhý a oběma cesta včetně pauzy trvala 2h. Jak dlouhá je trasa?

Protože tým Jáchyma, Oty a Prokopa získal nejvíce bodů z dopoledního testu, mohl se jejich tým vydat jako první do lesa, kde měli najít tři ukrytá stanoviště a splnit úkoly. Součástí týmu byla ještě světlovlasá Vanda, která se dobře orientovala v mapách, její tichá kamarádka Ema, upovídaná Alice a Čeněk, který s sebou neustále nosil Rubikovu kostku. Podle mapy zakrátko došli k prvnímu stanovišti, které bylo schované mezi stromy nedaleko tábora. Aby dostali nápovědu, kam mají jít dál, museli porazit jednoho z vedoucích ve speciálních šachách.

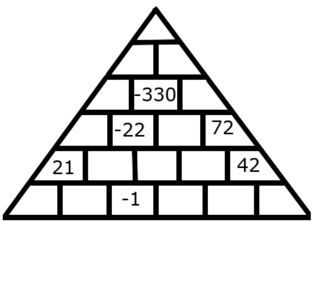
Úloha 4. (8 bodů): Jáchym a vedoucí hrají hru. Na šachovnici 21× 21 doprostřed postaví krále. Král se může pohybovat do všech směrů, ale jenom o jedno políčko. Pokaždé, když vedoucí udělá jeden tah králem, tak Jáchym postaví na šachovnici jednoho pěšáka tak, aby pokud možno krále zablokoval, aby už nemohl nikam jet. Kolik bude Jáchym minimálně potřebovat pěšáků na to, aby krále zablokoval, pokud oba hrají podle nejlepší strategie?



Jakmile začali luštit další nápovědu, spustil se hustý déšť. Rozluštit, kde se nachází další stanoviště, jim trvalo o poznání déle než poprvé, protože jim všechno znesnadňovaly kapky vody, které postupně rozmazávaly linie na mapě. Nakonec se jim jen díky Vandě povedlo najít místo s druhým úkolem. Vedoucí na stanovišti vypadal dost otráveně, jelikož kelímky, které měl připravené pro svůj úkol, byly až po okraj plné dešťové vody.

Úloha 5. (8 bodů): Čeněk a vedoucí hrají hru. Mají 5 kelímků, ve 2 kelímcích je 8 bílých a 2 černé kuličky, ve zbylých 3 je 6 bílých a 4 černé kuličky. Z kelímků mohou odebírat buď 2 bílé, nebo 1 černou kuličku. Vyhrává ten, kdo odebere poslední kuličku. Kdo z těch dvou musí vyhrát, pokud se v odebírání střídají, oba hrají podle nejlepší strategie a začíná Čeněk?

Zbývalo jim teď najít poslední stanoviště, které bylo od tábora vzdálené nejvíc. Obloha nyní byla úplně černá a déšť neustával, naopak se zdál čím dál hustší a nesnesitelnější. Dostávali se do části lesa, kde rostly stromy blíže u sebe, takže mezi nimi neviděli dál než na pár metrů před sebe. „Podívejte!“ trhla sebou Alice. „Myslím, že už jsme to našli!“ Všichni se vmžiku otočili směrem, kterým ukazovala. Mezi stromy nalevo se něco pohnulo, ale zakrátko to bylo opět pryč. Vyrazili tím směrem, ale nenarazili na jedinou známku posledního stanoviště.



„Asi jdeme špatně, podle mapy bychom se měli ubírat víc vpravo,“ uvažovala Vanda. Bez reptání ji poslechli a zakrátko na poslední stanoviště skutečně narazili. Nebyl u něho žádný vedoucí, jen zadání úkolu připíchnuté na kmeni obrovského stromu.

Úloha 6. (7 bodů): Doplň pyramidu. (Obr. výše.) Mezi řádky se vždy střídá sčítání a násobení.

Lence ta hádanka přišla dost složitá, protože ale byla obdařená výjimečnou inteligencí, po chvilce přemýšlení přišla na správnou odpověď.

„Tak a máme to, teď se můžeme konečně vrátit do tábora,“ radoval se Ota, když společnými silami dokončili poslední úkol. Všichni byli zmrzlí a promočení a v botách jim při každém kroku šplouchala voda.

„To se ti řekne,“ zašklebil se Jáchym. „Ale kudy?“

Měl pravdu. Všude kolem se tyčily stejně vyhlížející stromy a nebylo slyšet žádné jiné týmy, které by dorazily. Když se nikdo k ničemu neodhodlal, Vanda určila náhodný směr, kterým se vydali.

Po pár minutách před sebou uviděli něco jiného, než pustý les. K jejich zklamání to ale nebyl tábor, jen jakási chatrč, která vypadala, že se každým okamžikem musí sesypat.

„No výborně.“ zahuhlal Ota, který už několik hodin nic nejedl, a byl proto jaksepatří otrávený.

Vtom se přímo před nimi v temném okně chatrče na zlomek sekundy objevila tmavá silueta. Všichni sebou trhli. Postava však byla hned zase pryč. Nikdo z nich nemusel nic říkat. Celý tým naráz se dal do běhu. Chtěli se dostat co nejdál od té chatrče, běželi vytrvale a bez přestávky, dokud se konečně neocitli na známém území tábora. Nikdo si nelámal hlavu s tím, jak trefili zpátky, jen se co nejrychleji usušili a zalezli do stanů.

Jak minuty ubíhaly, postupně se začaly vracet ostatní týmy, kterým se úkoly nepodařilo najít tak rychle.

„Kdo myslíte, že v té divné chatrči bydlí?“ uvažoval Prokop, který o tom stále chtěl diskutovat.

„Nech to plavat,“ mávl rukou Ota, který na to nechtěl myslet, a byl rád, že je zpátky v teplém stanu. Jáchymovu pozornost upoutala náhlá změť hlasů a zvuky zmateného pobíhání sem a tam, které se ozývaly zvenku. Vylezl ze stanu a uviděl skupinku vedoucích, kteří mluvili o tom, že se ztratila obě kola a nikdo nemá ponětí kam. Jak zakrátko zjistil, kola nebylo to jediné, co se ztratilo.

„Všechno jídlo, které jsem si dneska nakoupil, je pryč!“ nadával Ota ve stanu a převracel všechno vzhůru nohama. „Kdo to mohl vzít?“ „To nevím, ale něco tady nechal“ zamračil se Prokop a zvedl ze země maličký bílý lístek. Stál na něm jen jednoslovný vzkaz: Díky.

*Řešení úloh 2. série posílejte do **31.12.2012** na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 01 Bílovec

Autorská řešení 1. série

Úloha 1.

$ab = a^2 + 7$ lze upravit na $ab - a^2 = 7$, dále vytknutím na $a(b - a) = 7$. Protože je 7 prvočíslo, je dělitelné pouze čísly 1 a 7. První možnost: $a = 1 \rightarrow b - a = 7$, z toho vyplývá $b = 8$. Druhá možnost: $a = 7 \rightarrow b - a = 1$, z toho vyplývá $b = 8$. a se tedy může rovnat číslům 1 a 7, b bude v obou případech 8.

Barča

Úloha 2.

Víme, že součet úhlů v trojúhelníku je 180°. Můžeme tedy spočítat úhel ABC, což je 30°. Dále sestrojíme úsečku CD. Víme, že $|AC| = |AD|$(jsou to poloměry kružnice k) a úhel CAD je 60°. Trojúhelník CAD je tedy rovnostranný. Z toho vyplývá, že úhel BDC je velký 120°. Dopočítáme úhel BCD, který je velký 30°. Trojúhelník BCD je tedy rovnoramenný. Platí pro něj, že $|CD| = |BD|$. A protože $|CD| = |AD|$, musí se rovnat $|BD| = |AD|$. Poměr $|AD| : |BD| = 1 : 1$.

Berča

Úloha 3.

Tuto úlohu šlo vyřešit několika způsoby. Nejdříve jednoduše trojčlenkou přijdeme na to, že Ota sám za sedm minut snědl přesně dva dílky. Dále můžeme zjistit, kolik každý z chlapců sní za minutu.

Ota: 1 dílek … 3,5 minut → asi 0,2857 dílků za minutu Jáchym: 1 dílek … 2 minuty → 0,5 dílků za minutu

Když čísla sečteme, zjistíme, že za každou minutu sní oba dohromady asi 0,7857 dílků. Nakonec tímto číslem vydělíme osm zbývajících dílků a dostaneme 8 : 0,7857 asi 10,18 minut, což je čas, za který oba společně pizzu dojedli. Pokud bychom přičetli i čas, kdy Ota jedl sám (sedm minut), zjistíme, že celá pizza byla pryč za 17,18 minut.

Terka

Úloha 4.

6 000 000 000 lidí na planetě
3% nejí maso
97% sní denně 0,85kg masa
Kolik tun masa by snědli, kdyby za rok přibylo 4% lidí? ¨

Nejdřív je potřeba spočítat počet lidí, jenž jí maso:

$$0.97 \cdot 6000000000 = 5820000000 lidí$$

Tohle číslo si vynásobíme hmotností masa za den:

$$5820000000 \cdot 0.85 = 4947000000g$$

Došli jsme k číslu, jenž udává hmotnost konzumovaného masa za jeden den. Vynásobíme jej počtem dní v roce a dostaneme hmotnost konzumovaného masa.

$$4947000000 \cdot 365 = 1805655000000g = 1805655 tun$$

Poslední krok je, že výsledek v tunách, vynásobíme číslem 1.04, neboť roční přírůstek obyvatelstva činí 4%.

$$1805655 \cdot 1.04 = 1877881.2 tun\ masa$$

Tomáš

Úloha 5.

Řada 1	2 karty
Řada 2	7 karet
Řada 3	15 karet
Řada 4	26 karet
Řada 5	40 karet
Řada 6	57 karet
Řada 7	77 karet

Lze dosadit tento vzorec, kde N = počet řad. Tento vzorec se ovšem vyplatí použít, když je počet řad velký.

$$\frac{(N+1)\cdot N}{2}\cdot 3 - N$$

Poslední jednoduchou úpravou zjistíme, kolik karet a pater bylo na začátku.

$$77 - 51 = 26$$

Jirka

Úloha 6.

Dráha mouchy je příliš složitá a nepotřebná, proto stačí zjistit pouze čas, za který se oba vlaky srazí a vynásobit to rychlostí mouchy.
1. Vlak: v – $65\frac{km}{h} = 65$x
2. Vlak: v – $80\frac{km}{h} = 80$x
3. Celková dráha : 180 km

$$65x + 80x = 180X = \frac{37}{29}$$

Rychlost mouchy: 95 $\frac{km}{h}$ Výsledná dráha se průměrná rychlost mouchy vynásobená časem: $37/29 \cdot 95 = 121,2$ km Moucha nalétala přibližně 121,2 km.

Chroby

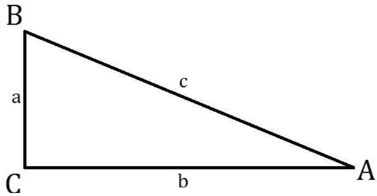
Věty o trojúhelnících

Pythagorova, Sinova a Cosinova věta

Tentokrát se seznámíme s nejdůležitějšími větami týkajícími se vlastností trojúhelníků. Věty vezmeme od nejjednodušších až po složitější.

Pythagorova věta

Vyjadřuje vztah mezi druhými mocninami délek, stran v pravoúhlém trojúhelníku.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Je to jedna z nejznámějších vět. Za jejího autora je považován řecký matematik Pythagoras.

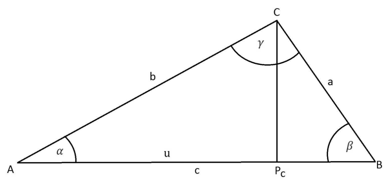
Sinová věta

Sinová věta se často používá k dopočítání ostatních stran v obecném trojúhelníku.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Teď si ukážeme její odvození. Mějme obecný trojúhelník ABC a u něj si vyznačme délky všech stran, velikosti úhlů a výšku.

Nejprve si pomocí goniometrických funkcí vyjádříme délku výšky. Využijeme k tomu pravoúhlého trojúhelníku AP_cC.



$$\sin\alpha = \frac{|CP_c|}{|AC|}$$

$$|CP_c| = \sin\alpha \cdot |AC| = \sin\alpha \cdot b$$

Teď to samé, ale pomocí trojúhelníku P_cBC.

$$|CP_c| = \sin\beta \cdot |BC| = \sin\beta \cdot a$$

Protože máme vyjádřenou délku výšky pomocí dvou trojúhelníků, tak teď už jenom stačí udělat poslední krok – dáme obě vyjádření délky strany $|CP_c|$ dohromady.

$$
\begin{aligned}
|CP_c| &= |CP_c| \\
\sin\alpha \cdot b = \sin\beta \cdot a / &\frac{1}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} \\
\frac{b}{\sin\beta} &= \frac{a}{\sin\alpha}
\end{aligned}
$$

Podobně bychom mohli dokázat i rovnosti dalšího poměru.

Cosinová věta

Cosinová věta vyjadřuje vztah mezi druhými mocninami stran obecného trojúhelníku v závislosti na velikosti úhlu α.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

Teď si ukážeme důkaz: Mějme jako v předchozím případě obecný trojúhelník, u kterého si označíme délky stran, velikosti úhlů, výšku a k tomu si ještě označíme vzdálenost paty výšky od bodu A jako neznámou u. Tento důkaz je maličko složitější, tak si ho rozdělíme na tři části: Uvažujme případ kde $\alpha < 90$. V tomto případě si vyjádříme délky stran pravoúhlého trojúhelníku P_cBC pomocí Pythagorovy věty. (obr. výše)

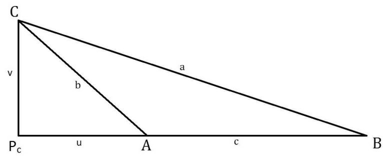
$$a^2 = v^2 + (c - u)^2$$

Dále si můžeme vyjádřit, že platí $u = b \cdot \cos\alpha$ a $v = b \cdot \sin\alpha$. Tyto hodnoty dosadíme do rovnice a rovnici pak upravíme.

$$
\begin{aligned}
a^2 &= (b \cdot \sin\alpha)^2 + (c - b \cdot \cos\alpha)^2 \\
a^2 &= b^2 \cdot \sin^2\alpha + c^2 – 2bc \cdot \cos\alpha + b^2 \cdot \cos^2\alpha \\
a^2 &= b^2 \cdot (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \\
a^2 &= b^2 \cdot (\frac{v^2}{b^2} + \frac{u^2}{b^2}) + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \\
&\mathit{pozn.}{:} v^2 + u^2 = b^2 \\
a^2 &= b^2 \cdot \frac{b^2}{b^2} + c^2 – 2bc \cdot \cos\alpha \\
a^2 &= b^2 \cdot 1 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha
\end{aligned}
$$

Po úpravě jsem dostal Cosinovou větu, ale zatím pouze v případě, kdy α je menší než 90. Teď si rozeberme druhý případ, kdy se $\alpha = 90$. V tomto případě se výraz v Cosinově větě $2bc{\cdot}\cos\alpha$ rovná nule, protože $\cos 90 = 0$. Zbytek je vlastně Pythagorova věta.

Poslední případ kde je $\alpha > 90$ v tomto případě bude rovnice stejná jako v prvním případě, ale tentokrát budeme místo odečítání u přičítat.



$$a^2 = v^2 + (c+u)^2$$

A dále už postupujeme stejně jako v prvním případě. Takže si můžeme vyjádřit, že platí $u = b \cdot \cos(180-\alpha)$ a $v = b \cdot \sin(180-\alpha)$. A jelikož platí, že $\cos(180-\alpha) = -\cos{\cdot}\alpha$ a $\sin(180-\alpha) = \sin{\cdot}\alpha$, můžeme tyto hodnoty dosadit do rovnice a rovnici pak upravit.

$$a^2 = (b \cdot \sin\alpha)^2 + (c - b \cdot \cos\alpha)^2$$
$$a^2 = b^2 \cdot \sin^2\alpha + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha + b^2 \cdot \cos^2\alpha$$
$$a^2 = b^2 \cdot (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$a^2 = b^2 \cdot (\frac{v^2}{b^2} + \frac{u^2}{b^2}) + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$\textit{pozn.:} v^2 + u^2 = b^2$$
$$a^2 = b^2 \cdot \frac{b^2}{b^2} + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$a^2 = b^2 \cdot 1 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

Zase jsme dostali Cosinovu větu, proto vidíte, že Cosinova věta platí.
Příště se podíváme na větu Tangentovu a Čévovu.

Jirka

Výsledkové listiny

Tady najdete výsledkovou listinu řešitelů podle ročníků.

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Jiří	Zelený	2	-	-	-	-	-	2	2

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Natálie	Maleňáková	7	7	6	5	8	7	40	40
2.	Anastázie	Štěpánková	4	7	3	5	4	7	30	30
3.	Linda	Onderková	-	-	-	5	-	7	12	12

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Tereza	Zelená	7	-	0	5	8	-	20	20
2.	Jana	Kolenovská	7	-	0	4	-	7	18	18
3.	Barbora	Chlostová	0	3	1	3	7	-	14	14
4.	Alena	Bidlová	0	3	0	5	2	-	10	10

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Klára	Mořkovská	7	7	6	5	5	7	37	37
2.	Vanda	Kostková	7	7	-	5	-	-	19	19
3.	Lenka	Švidrnochová	0	4	6	-	-	6	16	16