KOKOS

26.ročník ⋆ 4.leták

Milý řešiteli!

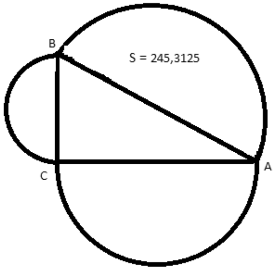
Zdravím milý řešiteli, s další sérií ti přinášíme také pozvánku na jarní soustředění. Na co se můžeš těšit? Především na 5 dnů zábavy se skvělými kamarády ze všech koutů naší republiky. Přichystané pro tebe máme zajímavé přednášky nejen z matematiky, fyziky a astronomie, které si sám vybereš podle tvého zájmu. Zavítáme také do chemické laboratoře a vyzkoušíme si znovu zajímavé pokusy. Samozřejmě vyrazíme i do přírody a uděláme si menší výlet po okolí Soustředění proběhne ve dnech 11. dubna – 15. dubna před Velikonočními prázdninami. Již tradičně se bude konat v budově Domova mládeže při Gymnáziu Mikuláše Koperníka v Bílovci pod pedagogickým dohledem za organizace studentů gymnázia

Cena, pro tento rok stanovená na 469 Kč, zahrnuje veškerý program včetně stravy a ubytování. Pokud máš jakékoli dotazy, neváhej se obrátit na náš email gmkkokos@seznam.cz, kde Ti rádi všechno vysvětlíme. Pokud je Ti vše jasné, pak neváhej a vyplň přihlášku, kterou najdeš na http://kokos.gmk.cz/. Poté, co ji obdržíme, Ti do několika dnů zašleme email s podrobnými informacemi..

Zadání úloh

Lenka už se nemohla dočkat, až se konečně znovu ocitne doma. „Co mám teď udělat?“ zeptala se netrpělivě čtyř dětí, které jí novou kalkulačku tak snadno zkonstruovaly. „Už jenom stačí, abys zadala kód, který tě přenese zpátky.“ odpověděla Kristýna. Martin, který už dlouhou dobu něco hledal v nekonečné databázi čísel, se zvedl od stolu a podal Lence papírek, na kterém stál čtyřmístný kód: 6116. Lenka za všechno poděkovala, a když se se všemi rozloučila, naťukala kód do kalkulačky. „Počkej, zadrž!“ vykřikl náhle Martin. „Zastav!“ Ale Lenka už jim zmizela z očí. „Držela lístek obráceně.“ řekl Martin nešťastně.

Opět ta známá závrať, na kterou už si Lenka začínala skoro zvykat. Hodnou chvíli nechala zavřené oči, protože se obávala toho, co uvidí. Horký vzduch a šum neznámých hlasů jí napovídal, že tady něco nehraje. O vteřinu později se její předtucha potvrdila; zjistila, že sedí na zaprášené zemi jakéhosi náměstí s různými stánky a všude okolo se neuspořádaně pohybují barevně oblečení lidé. Ať se to trojúhelníkové náměstí nacházelo kdekoliv, doma to určitě nebylo.



Úloha 1. (5 bodů): Spočítejte součet obsahů půlkruhů, které mají průměry totožné s odvěsnami trojúhelníku ABC, víte-li, že trojúhelník ABC je pravoúhlým trojúhelníkem, obsah půlkruhu o průměru předpony $= 245{,}3125$ a že všechny délky stran jsou celočíselné. $\pi = 3,14$.

To nejlepší, co v tu chvíli Lenku napadlo, bylo požádat o pomoc někoho z té spousty lidí. S námahou se vyškrábala na nohy, ale hned se zase ocitla na zemi, protože musela rychle uhnout před zářivě červeným strojem, který právě projížděl kolem, zjevně nikým neřízený.

Úloha 2. (5 bodů): Pásový stroj pohání soustava 3 ozubených koleček. Poloměr třetího kolečka je 0,3185 m. Pokud se první kolo otočí o 1°, otočí se prostřední o 15°. Otočí-li se prostřední kolo o 40°, tak se třetí kolo otočí o 10°. O kolik se stupňů se musí otočit první ozubené kolo, aby se pás posunul o 9 m?

Kalkulačka Lence při pádu vylétla z ruky a než stačila cokoliv podniknout, kdosi ji ve zlomku sekundy sebral ze země a pádil pryč.

„Stůjte!“ vykřikla Lenka a pustila se za neznámým, který se proplétal mezi lidmi před ní. Pustila se za ním, neměla v plánu se vzdát. Zloděj rozrazil skleněné dveře obrovské budovy s množstvím oken a zamířil dovnitř. Lenka se vrhla za ním.

Úloha 3. (7 bodů): Uvnitř budovy se nacházela burza. Na této burze se obchoduje s cennými papíry tří hodnot: expensive, cheap, secret-price. Pokud chceme uskutečnit nějaký obchod, musíme prodat dva cenné papíry různých hodnot a za tento prodej dostaneme cenný papír třetí hodnoty. Kolik obchodů můžeme nejvýše na takovéto burze uskutečnit, jestliže máte 24 expensive, 3 cheap a 8 secret-price cenných papírů? Jaké cenné papíry nám zbydou, jestliže podnikneme maximální počet obchodů?

Zloděj s kalkulačkou neuvěřitelnou rychlostí proběhl celý sál, ale Lenka ho nepřestávala pronásledovat, přestože jí začínal docházet dech. Proběhli dveřmi na konci sálu a ocitli se v jakémsi muzeu, kde panovalo mnohem větší ticho. Lenka v té změti barev ztratila neznámého z očí, nejspíš se mu podařilo ukrýt se mezi exponáty.

Úloha 4. (9 bodů): Nejvíce lidí si prohlíželo na zlatém podstavci stojící průhlednou krychli, která měla stranu 42 cm a uprostřed ní byla tyč ve tvaru válce (její podstavy jsou však celé na stěně krychle) jejíž přesný střed prochází i přesným středem krychle. Vezmeme-li délku od středu krychle do středu jedné z podstav je tato délka 27 cm. Vypočítej obsah tyče a její délku strany, jestliže víš, že nejbližší bod tyče od středu strany, které se tyč dotýká, je 15,5 cm.

Lenka se marně rozhlížela po lidech, kteří byli zabráni do obrazů a soch. Nebyla si jistá, jestli by cizince poznala, i kdyby se na něj snad právě dívala. Věděla vlastně jen to, že umí rychle utíkat. Její pozornost upoutal exponát v rohu místnosti, jakási veliká barevná stěna. Koutkem oka zaznamenala, jak se kolem něj někdo mihnul a teď utíká dál.

Úloha 5. (8 bodů): Byla to plocha o velikosti 50×50 kostiček, zaplněná objekty (z toho každý zabíral 4 kostičky) o 7 různých barvách – růžová (R), červená ($\check{C}$), oranžová (O), žlutá ($\check{Z}$), zelená (Z), fialová (F),modrá (M). Objekty měly 4 různé tvary.

Pro růžovou barvu platí: 1. tvar tvořil 2/5 R; 2. tvar 1/4 R; 3. tvar 22 R a 4. tvar zbytek

Pro 1. tvar platí: R tvořila 8/11 objektů a byla rovna π^π zaokrouhleno na desítky; poměr $\check{C} : O : \check{Z} : M$ je 3:9:2:1.

Pro 2. tvar: součet $\check{C} + O + Z + F + M$ je o 78 menší od počtu žlutých objektů; $M = \check{C} + O + Z + F$; $\check{C} = F$; $10Z = F$; $\check{C}$ má právě 6 dělitelů (včetně 1 a sebe sama); $O = 4Z$. Objektů 2. tvaru je nejvýše 400.

Pro 3. tvar: $O + Z - 1 = \check{C}$; $M + F = \check{Z} + 2(O + Z)$; $O = Z$; $\check{Z} = 5Z + 5$; $\check{C}$ je dělitelné 9; $(M + F)$ je dělitelné 2

Pro 4. tvar: $F - O = \check{C}$; $F + 2 = R$; $\check{Z} + Z = 107$; $\check{Z} = Z - 15$

Pro $\check{Z}, Z, M$ a F platí, že počet objektů v jednom jejich tvaru je větší, než ve 3 zbylých dohromady, konkrétně ve 2. tvaru $\check{Z}$, ve 4. tvaru Z, ve 2. tvaru M a ve 3. tvaru F. Celkový počet Z=celkový počet M=celkový počet $\check{C}$.

Kolik je objektů v každé jednotlivé barvě a kolik je objektů v každém tvaru?

Než Lenka stačila nějak zareagovat, zloděj jí opět zmizel z očí. Usoudila, že bude nejlepší najít východ a vrátit se na náměstí. Doufala, že cizinec znovu zamíří právě tam, a proto se vydala po šipkách, které ukazovaly k východu. Nesměla ztrácet čas, byla to její jediná šance.

Úloha 6. (6 bodů): Šipky mají tvar trojúhelníku - který pojmenujeme ABC - s dvojcifernými délkami stran. Platí, že strana a je 3x delší než b a délky těchto dvou jsou tvořený 4 různými lichými číslicemi. Kolika celočíselných hodnot může nabývat obvod trojúhelníku abc?

Lenka se znovu ocitla na náměstí, které už znala. A hned před sebou spatřila zloděje její kalkulačky! Stál u nějakého stánku a právě se o něčem dohadoval s prodavačem. Lenka se k němu rozeběhla a popadla ho zezadu za cíp kabátu. „Vraťte to, co jste ukradl!“ vykřikla, ale cizinec se jí vysmekl. „O čem to mluvíte?“ zeptal se důrazně a tvářil se, jako by Lenka neměla všech pět pohromadě. „O mé kalkulačce!“ zaječela Lenka. „Vraťte mi ji!“ „To asi půjde těžko,“ odpověděl cizinec. „Právě jsem ji totiž prodal.“ „Přesně tak,“ potvrdil prodavač, a Lenku popadla zlost, když viděla, že její kalkulačka je vyložená před ní mezi jinými drobnými předměty. „Pokud ji ode mě chcete koupit, můžeme se dohodnout na ceně.“ Lenka zuřila, ale nemohla nic dělat. Musela rychle vymyslet plán, protože zatím to vypadalo, že se domů ještě dlouho nevrátí.

*Řešení úloh 4. série posílejte do **5.05.2014** na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 01 Bílovec

Autorská řešení 3. série

Úloha 1.

Vezměme libovolné číslo n v kruhu. Jeho sousedé mohou být napsáni ve tvaru $n+2k+1, n-(2l+1)$ - protože ze zadání víme, že sousedem sudého čísla jsou 2 lichá čísla a naopak. Sečtením těchto 2 čísel dostaneme $s = 2n + 2k - 2l = 2(n + k - l)$, což je sudé číslo. Jeho "sousedy ob 1" můžeme napsat ve tvaru $n + 2p$, $n - 2q$, odečtením čísel v libovolném pořadí dostaneme sudé číslo, tudíž při provádění zadaných operací se parita nemění.

Sečtením čísel na sudých a poté na lichých pozicích zjišťujeme, že se tyto součty liší paritně (jeden je sudý, druhý lichý). Jak jsme ale dokázali, parita žádného z čísel v kruhu se nezmění, tudíž se nezmění ani parita součtů. Podtrženo, sečteno, rovnosti součtů nelze dosáhnout.

Honza

Úloha 2.

Základní vzorec pro výpočet pravděpodobnosti je: $\frac{\textit{Počet všech pozitivních možností}}{\textit{počet všech možností}} \cdot 100$ Počet správných cest je 2, protože kulička vždy musí spadnout na jednu stranu. Tedy, pokud na začátku spadne doleva, musí padat jenom doleva, pokud spadne doprava, musí padat jenom doprava, což je dáno trojúhelníkovým tvarem automatu. Jestli se kulička vzdálí od krajní stěny automatu, už se nemůže dostat do krajní dírky. Nyní stačit dosadit do vzorce: $\frac{2}{2^{68}} \cdot 100 = 6,776 \cdot 10^{-19}$

Tomáš

Úloha 3.
Provedeme zápis úlohy. x...*Celkový počet kuliček*
Josef...$\frac{x}{2}$–4
Martina...$\frac{x}{5}+6$
Kristýna...$(\frac{x}{2}$–4$) : 3$
Diana...$[(\frac{x}{2}$–4$) : 3]$–1

Nyní dosadíme do vzorce a uprvíme rovnici.

$$
\begin{aligned}
x &= J + M + K + D \\
x &= \frac{x}{2}–4 + \frac{x}{5} + 6 + (\frac{x}{2}–4)/3 + [(\frac{x}{2}–4)/3]–1 \\
x &= x - \frac{8}{2} + \frac{x+30}{5} + \frac{x–8}{2} \cdot \frac{1}{3} + (\frac{x–8}{2} \cdot \frac{1}{3})–1 \\
x &= \cdot x–82 + \frac{x+30}{5} + \frac{x–8}{6} + (\frac{x–8}{6}–1) \\
x &= \frac{x–8}{2} + \frac{x+30}{5} + \frac{x–8}{6} + \frac{x–14}{6} \\
x &= 15 \cdot (x–8) + 6 \cdot (x+30) \cdot 5 \cdot (x–8) + \frac{5(x–14)}{30} \\
30x &= 15 \cdot (x–8) + 6 \cdot (x+30) + 5 \cdot (x-8) + 5 \cdot (x–14) \\
30x &= 15x–120 + 6x + 180 + 5x–40 + 5x–70 \\
30x &= 31x–50 \\
x &= 50
\end{aligned}
$$

Tudíž nám vychází, že děti mají: Josef 21 kuliček. Martina 16 kuliček. *Kristýna* 7 kuliček. Diana 6 kuliček.

James

Úloha 4.

Označme si číslice A, B, C, D, E, F. Ze zadání víme, že: $F - A = A - B \rightarrow F - 2A = B$ $F + 2A = 11$ (nejnižší dvoumístné prvočíslo) $\rightarrow 2A = 11 - F$ $E + F = 13$ (prvočíselné dvojče jedenáctky je 13) $\rightarrow E = 13 - F$ F může být 1, 3, 7 nebo 9, protože u dvouciferných prvočísel nemůže být 2. cifra sudá a ani se nemůže rovnat 5. Pokud: $F = 1 \rightarrow E = 12$, ale E je cifra, tzn. je jednomístné. $F = 3 \rightarrow E = 10$, ale E je cifra, tzn. je jednomístné. $F = 7 \rightarrow E = 6$ (67 je prvočíslo) $\wedge$ $2A = 11 - 7 \rightarrow A = 2$ a zároveň $B = 7 - 2.2 \rightarrow B = 3$ (23 je prvočíslo) $F = 9 \rightarrow E = 4$, 49 ale není prvočíslo. Šestimístné prvočíslo je tedy $23CD67$. $A+B+C+D$ je dělitelné třemi, proto $C+D = 1; 4; 7; 10; 13; 16$ (max. součet pro 2 číslice je 18 a další číslo by bylo 19). CD je k tomu prvočíslo, proto možnosti CD jsou: 07; 13; 19; 31; 37; 43; 61; 67; 73; 79; 97. Teď stačí zjistit, díky kterým z těchto čísel po dosazení za CD bude $23CD67$ prvočíslo, např. v tabulce prvočísel do 1 000 000. Možnosti jsou:230767; 231367; 231967; 236167; 237967 Uznával jsem i variantu bez možnosti 230767, jelikož v zadání je, že CD je prvočíslo a je celkem sporné, zda 07 se dá považovat jako prvočíslo nebo ne.

Damián

Úloha 5.

Nejdříve si určíme obsah trojúhelníku AFC (označme jej S_1). Délku úsečky AF vypočítáme za pomoci Pythagorovy věty: $|AF|^2 = |CF|^2 - |AC|^2 = 42–22 = 12$, a proto $|AF| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Z toho vypočteme, že: $S_1 = \frac{|AF|\cdot|AC|}{2} = \frac{2\sqrt{3}\cdot 2}{2} = 2\sqrt{3}$ (neboť úhel FAC je pravý). Čtyřúhelník $ADEC$ je složen ze tří trojúhelníků, a to $\triangle ABC$ s obsahem S_2, $\triangle ADB$ s obsahem S_3 a $\triangle BEC$ s obsahem S_1, jelikož trojúhelníky AFC a BEC jsou shodné podle věty SSU. Tudíž: $S_{ADEC} = S_1 + S_2 + S_3$ $S_2 = \frac{a\cdot v_a}{2} = \frac{a\cdot\sqrt{a^2 - a^2/4}}{2} = 2x\sqrt{22–22/4}/2 = 2x\sqrt{3}/2 = \sqrt{3}$ Pokud vyznačíme bod S, jenž je osově souměrný s bodem D podle osy souměrnosti procházející úsečkou AB, vzniknou nám tři shodné trojúhelníky ($\triangle ABS, \triangle BCS, \triangle CAS$). Tyto trojúhelníky jsou shodné s $\triangle ADB$, podle věty USU. Proto obsah S_3 je roven třetině S_2. Nyní můžeme vypočítat obsah čtyřúhelníku: $S_{ADEC} = S_1 + S_2 + S_3 = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3}/3 = 3\sqrt{3} + \sqrt{3}/3$ A nyní určení poměr: $S_{AFC} : S_{ADEC} = 2\sqrt{3} : 3\sqrt{3} + \sqrt{3}/3 = 6\sqrt{3} : 10\sqrt{3} = 6 : 10 = 3 : 5$

Jirka

Úloha 6.

Nejprve vezmeme $\triangle AGE$, stranu AG spočítáme tak, že první zjistíme délku úsečky pod body AG, které je rovna 20 cm z toho můžeme spočítat úsečku $AG\sqrt{20^2+10.5^2} = 23cm$. EG spočteme jako $\sqrt{31,5^2+28^2} = 42cm$. AE jako $\sqrt{20^2+42^2} = 47cm$. Další $\triangle$ bude $\triangle DBF$, u kterého již ze začátku víme stranu $BD = 7$cm, poté vezmeme třeba $BF\sqrt{14^2+31,5^2} = 34cm$ a DF jako $\sqrt{21^2+31.5^2} = 38cm$. A jako poslední $\triangle$ zbývá $\triangle CBG$ úsečku CB spočteme jako $\sqrt{21^2+14^2} = 25cm$, BG jako $\sqrt{31.5^2+14^2} = 34cm$ a CG jako $\sqrt{20^2+10.5^2} = 23cm$. Poté co známe všechny délky všech stran trojúhelníků, můžeme jednoduše spočítat S přes Heronův Vzorec, který je: $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ kde s je polovina součtu všech stran. Už není těžké spočítat S všech $\triangle$. $\triangle AGE$ má $s =$ 56cm, $\triangle BDF$ má $s =$ 40cm a $\triangle BCG =$ 42cm. A Zbývají už jen $S\text{–}SAGE = \sqrt{56 \cdot 33 \cdot 14 \cdot 9} = 483cm^2$, $\triangle BDF = \sqrt{40 \cdot 32 \cdot 5 \cdot 2} = 115cm^2$ a $\triangle BCG\sqrt{41 \cdot 19 \cdot 17 \cdot 7} = 307cm^2$

Chroby

Výsledkové listiny

Tady najdete jen několik nejlepších řešitelů, pro úplné výsledkové listiny se podívejte na naše internetové stránky.

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Natálie	Maleňáková	8	5	6	7	-	-	26	87
2.	Vilém	Jankovský	0	0	6	4	6	4	20	65
3.	Karolína	Štorchová	8	2	6	6	6	-	28	63

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Jan	Kačenka	8	5	6	6	6	-	31	91
2.	Jana	Kolenovská	-	-	6	6	-	-	12	62
3.	Tereza	Zelená	-	-	-	-	-	-	0	29

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Klára	Mořkovská	-	-	6	5	6	1	18	81
2.	Luboš	Bartík	6	3	-	-	6	-	15	75
3.	Thea	Kratochvílová	-	-	-	-	-	-	0	43

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Bára	Tížková	7	5	6	6	6	6	36	110
2.	Jiří	Vala	8	3	6	6	3	3	29	103
3.	Jan	Havelka	8	0	6	-	4	7	25	96
4.	Denisa	Chytilová	8	3	6	6	6	-	29	86
5.	Jan	Preiss	-	-	-	-	-	-	0	75
6.	Berenika	Čermáková	-	-	-	-	-	-	0	62
7.	Adéla	Hanková	-	-	-	-	-	-	0	46
8.	David	Vranešic	-	-	-	-	-	-	0	15
9.	Dominik	Vrba	-	-	-	-	-	-	0	12