KOKOS

26.ročník ⋆ 3.leták

Milý řešiteli!

Ahoj milý řešiteli, je tady nový rok a s ním další série KOperníkova KOrespondenčního Semináře. V prvé řadě bychom Ti rádi poblahopřáli všechno nejlepší do nového roku a mnoho matematických úspěchů za celý admin team. S novým rokem přicházíme i s novou vizáží našich webových stránek, avšak internetová adresa zůstává stejná, takže neváhej a určitě zkoukni. Máme na nich i připravenou soutěž (více podrobností na stránkách). Brzy se na webových stránkách objeví i informace k nadcházejícímu jarnímu soustředění tak neváhejte a přihlaste se zavčasu. (Šetřte naše lesy, používejte obě strany papíru.)

Zadání úloh

Lenka se usilovně snažila nezačít panikařit. Dřevěné dveře chatrče začaly povolovat a vypadalo to, že co nevidět vypadnou z pantů. O několik sekund později se tak skutečně stalo, a dovnitř se začali hrnout obrovští černí brouci, kteří sahali Lence téměř po kolena. Lenka zaječela a rozběhla se ke schodům na konci místnosti. Brouci, jichž stále přibývalo, se pohybovali po chatrči všemi směry, jako by po něčem pátrali. Lenka mezitím vyběhla do horního patra. Zezdola se ozývalo klapání kusadel obřích brouků a někteří už začali vylézat po schodech za Lenkou. Lenka bez rozmyšlení vklouzla do jakýchsi dveří.

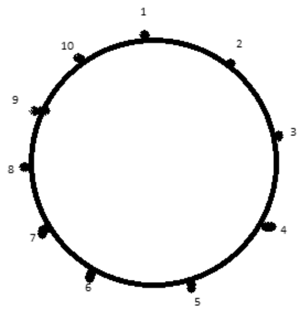
Ocitla se v pokoji, který byl téměř prázdný, až na obrovský kruh, který stál uprostřed místnosti. Kruh měl po obvodu napsaná čísla, která Lence nedávala žádný smysl. Přistoupila blíž.

Úloha 1. (8 bodů): Máme 10 čísel napsaných kolem kruhu. Čísla 1, 3, 5, 7 a 9 jsou umístěná na lichých pozicích; čísla 2, 4, 6, 8 a 10 na sudých. Na každém čísle můžeme provést následující operace, kolikrát chceme:

1. K vybranému číslu přičteme součet jeho sousedů
2. Od vybraného čísla odečteme rozdíl čísel vzdálených od něj o 2.

Lze docílit rovnosti součtů všech čísel na lichých a sudých pozicích? Svou odpověď zdůvodni.

KoKoS, Gymnázium Mikuláše Koperníka, 17.listopadu 526, 743 01 Bílovec ✉



Uvnitř kruhu se vzduch podivně vlnil a nešlo přes něj vidět na druhou stranu. Lenka přistoupila ještě blíž a vtom ji kruh začal velkou silou vtahovat dovnitř. Zamotala se jí hlava a tak zavřela oči a cítila jenom vítr, který foukal na všechny strany...

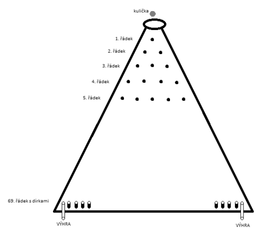
Když Lenka oči zase otevřela, zjistila, že se nachází zase někde úplně jinde. Už jí z toho začínalo přeskakovat, i když byla ráda, že nikde poblíž nejsou ti odporní brouci. Vypadalo to, že se přemístila do jakési hrací místnosti. Všude okolo byly nejrůznější barevné automaty, na kterých ovšem nikdo nehrál.

Úloha 2. (5 bodů): Jeden z výherních automatů fungoval čistě na principu pravděpodobnosti. V automatu je kulička, která padá přes překážky dolů. Vyhraješ v případě, že kulička skončí v jedné z krajních dírek. Dno automatu je 69. řádek. Jaká je pravděpodobnost, že vyhraješ (v %), pokud pravděpodobnost, že kulička spadne nalevo, činí 50% a napravo taktéž? (viz. obrázek níže)

Lenka si až po chvilce všimla, že v tmavém koutě místnosti sedí čtyři děti a hrají kuličky.

Úloha 3. (6 bodů): Josef, Martin, Kristýna a Diana hrají kuličky. Když hra skončí, Josef má o 4 kuličky méně, než je polovina všech kuliček, Martin má pětinu všech kuliček a ještě 6 navíc, Kristýna třikrát méně, než Josef a Diana o jednu kuličku méně, než Kristýna. Které z dětí má na konci hry nejméně a které nejvíce kuliček?

Děti se náhle přestaly zabývat hrou a otočily se na Lenku. „Ahoj," pozdravila Lenka a nejistě přešlapovala z nohy na nohu. „Ahoj," řekla jedna z dívek, která se jmenovala Kristýna. Ostatní taky pozdravili, ale podezíravě si Lenku měřili. „Ty ses sem přemístila portálem?" zeptal se kluk, který se jmenoval Josef. Lenka přikývla a potom začala vyprávět, co se stalo. „Myslím, že bychom ti mohli pomoct," řekl druhý z chlapců, který se jmenoval Martin. „Zrovna pracujeme na výrobě jedné takové kouzelné kalkulačky. I když to trvalo velice dlouho, mohli bychom ti kalkulačku dát a ty by ses s ní pak přenesla zpátky domů." „Pojď s námi," řekla Kristýna a Lenka děti následovala ke dveřím. Diana naťukala kód tvořený z šesti číslic a dveře se samy otevřely.



Úloha 4. (7 bodů): Máme šesticiferné prvočíslo. Odečteme-li první od poslední číslice, vyjde nám to stejné, jako když sečteme první a druhou. Když sečteme poslední číslici s dvojnásobkem první číslice, vyjde nám nejnižší dvojmístné prvočíslo. Sečtením předposlední a poslední číslice nám vyjde prvočíslo, předchozí a toto prvočíslo jsou prvočíselná dvojčata. Čísla, která se dají zapsat jako 1 (1. číslo) 2 (2. číslo), 3 s 4 a 5 s 6 jsou prvočísla. Počáteční čtyřciferí je dělitelné třemi.

Vypiš všechny možnosti.

Ocitli se v malé dílně. „To, co tady uvidíš je přísně tajné“ upozornila Lenku Kristýna. „Takže po tobě musíme žádat, abys o tom pomlčela před kýmkoliv dalším.“ Lenka přikývla a rozhlédla se kolem. Všude se povalovalo plno součástek a nákresů, kterým nerozuměla. „Dokončíme pro tebe kalkulačku, ale zabere nám to nejspíš ještě trochu času“ řekl Martin. „Můžeš se zatím posadit.“

Lenka usedla na židli a stále se nepřestávala rozhlížet kolem. Děti se zatím shromáždily u stolu kolem jakéhosi nákresu a horlivě o něčem diskutovaly.

Úloha 5. (6 bodů): Na papíře je nakreslený rovnostranný trojúhelník ABC se stranou a. Sestrojte kolmici k ke straně BC procházející bodem B a kolmici l ke straně AC procházející bodem A. Průsečík kolmic označte D. Nyní sestrojte rovnoběžku m rovnoběžnou se stranou AB procházející bodem C. Průsečík k a m označte E, průsečík l a m F. Vypočtěte poměr obsahů pravoúhlého trojúhelníku ACF a čtyřúhelníku $ADEC$, víte-li, že $a = 2$, strana $EF = 4a$.

Když se děti přestaly zabývat papírem, začaly cosi konstruovat z miniaturních součástek. Některé nešly málem ani vidět a Lenka si říkala, jaký je to zázrak, že se jim ještě nepoztrácely. Jedna z malých součástek, která měla tvar válce, se po chvíli skutečně málem zakutálela pod stůl.

Úloha 6. (8 bodů): Ve válci s poloměrem 14 cm a výškou 42 cm je umístěn trojúhelník a lichoběžník. Trojúhelník je tvořen spojením bodů z hrany spodní podstavy (A), středu horní podstavy (B) a středu výšky stěny válce (C), když bych se díval na válec z vrchu (viděl bych jen kruh) taky by Body tvořily jednu úsečku procházející Středem válce (kruhu). Lichoběžník má body umístěné (D) je na horní podstavě mezi středem a hranou, (E) je na druhé straně zobrazeno zrcadlově podle středu ale ve 2x větší vzdálenosti (dotýká se hrany), (F) je ve $\frac{1}{4}$ výšky válce a (G) je zobrazeno ve stejné výšce taky zrcadlově podle středu (D je spojeno s G a E s F). Kdybych se znova podíval z vrchu tak lichoběžník opět tvoří úsečku, ale kolmou k úsečce vzniklé z trojúhelníku. Jaký obsah má trojúhelník AGE a DBF a CBG.? (Všechny hodnoty během výpočtů zaokrohlujte na jednotky.)

Když se už Lenka začínala nudit, děti se konečně zvedly od stolu. „Hotovo,“ prohlásil Martin a podal Lence úplně novou kalkulačku.

*Řešení úloh 3. série posílejte do **16.2.2013** na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 01 Bílovec

Autorská řešení 1. série

Úloha 1.

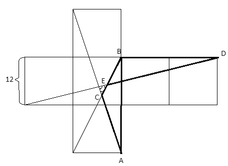
Pokud je naším cílem vyřešit tuto úlohu, pak můžeme použít metodu, kterou experti přes pravdomluvné a lháře dobře ovládají: Když chcete zjistit, je-li nějaký výrok (označme ho P) pravdivý, stačí položit jedinou otázku člověku, který to ví a je pravdomluvný nebo lhář. Prostě se ho zeptáte: „Je výrok, že jste pravdomluvný, ekvivalentní výroku, že P je pravdivý?“ Jestliže vám odpoví „ano,“ víte, že P je pravdivý; pokud vám odpoví „ne,“ víte, že P je nepravdivý. Tuto metodu řešení použijeme a zjistíme následující. Z výroku C vyplývá, že A a B mají stejnou povahu, tj. buď jsou oba pravdomluvní, nebo lháři. Jejich výroky jsou tedy oba pravdivé, nebo oba nepravdivé. Předpokládejme, že jsou oba pravdivé. Pak podle výroku A je na ostrově sudý počet lhářů. Podle výroku B je na ostrově lichý počet lidí, včetně vás. Jenomže vy nejste ani pravdomluvný, ani lhář, a jste jediným návštěvníkem na ostrově, takže na ostrově je sudý počet obyvatel. Když odečtete od sudého počtu obyvatel sudý počet lhářů, vyjde vám sudý počet pravdomluvných. V tomhle případě tedy na ostrově poklad je. Naopak předpokládejme, že oba výroky jsou nepravdivé. To znamená, že na ostrově je lichý počet lhářů a lichý počet obyvatel (všech lidí na ostrově včetně vás je sudý počet). Potom tu musí opět být sudý počet poctivců, takže zase na ostrově poklad je. Úlohu lze vyřešit také pomocí negace výroku C, avšak zde by bylo zapotřebí využít znalosti z výrokové logiky.

Péťa

Úloha 2.

Ze zadání nám vyplývá, že máme zjistit tyto úhly, přičemž obrazec se skládá ze šesti čtverců. Řešení je mnoho, ale vezeme si třeba tyto dva trojúhelníky. V tomto trojúhelníku vypočteme úhly snadno podle goniometrické funkce tangens. Jsou to úhly: $\alpha = 18{,}43°$;$\beta = 26.56°$; $\gamma = 135{,}01°$. Nyní vidíme, že největší úhel je vedlejším úhlem k hledanému úhlu. Dopočítáme: $180° - 135,01° = 44,99°$ tohle je jeden z hl. úhlů. Nyní si vezmeme druhý trojúhelník. Úhel u vrcholu B vypočítáme jako $90 + \beta = 116,56°$ Úhel u vrcholu D vypočítáme pomoci gon. funkce tg úhel je 14,03° Poslední úhel dopočítáme ze znalosti trojúhelníku, tento poslední úhel je vrcholový úhel k 2. hledanému úhlum, a proto tyto úhly jsou stejné a jsou tedy 49,41°. Poslední hledaný úhel dopočítáme jako $180° - 44,99° + 49,41 = 85,6°$.

Hledaný trojúhelník má úhly 44,99°, 49,41° a 85,6°.



Tomík

Úloha 3.

Víme, že byly 4 útoky a taky víme o všech, na koho byly směřovány. Víme taky, která kolonie založila jeden útok. Zbývají nám 3 kolonie, o kterých nebylo zmínky, a 3 útočníci – to znamená, že každá z těch kolonií (A, C a D) jednou zaútočila. F nezaútočila ani na B, ani na E (E měla na začátku vyšší počet brouků (b.), než F), takže musela zaútočit na C. To znamená, že na B zaútočily kolonie D a E (obě jsou výš v abecedním pořadí a C se bránila před F). Zbývá útočník A a bránící se kolonie E ⇒ A napadla E. Při svém útoku E přišla o počet b. dělitelný 7, to znamená, že na počátku E měla počet b. dělitelný 7, takže 35 nebo 28 (21 ne, protože F měla na počátku nižší počet b. a to bylo 25). Jeden z útočníků na B měl nejmenší počáteční počet b. – bylo to D, jelikož E mělo na počátku brouků nejvíc. Při útoku F na C, C ztratila 7 brouků, F taktéž a B taky 7, jelikož B přišla při obraně před D o tolik b., kolik F při svém útoku. C mohla mít na počátku pouze 18 b., protože z čísel 15 až 19, pouze 18 - 7 je prvočíslo. Zůstatek b. v B po 1. útoku na něj (čili po útoku E; 2. útok na B byl útok C) je 40% z toho, kolik měla B před útokem + 2. Jelikož 16 (to je nejmenší počáteční počet brouků, který ale mělo D) ¡ počáteční zůstatek b. v B ¡ 30, tak těch 40% mohlo být 8 nebo 10. V tom případě 100% = 20 nebo 25 a počet b. v B před útokem může být tedy 18 nebo 23. v 1. případě (18 b. před, 8 po útoku) by však B přišla o počet b., který není prvočíslo, ale v 2. případě (23 b. před, 10 po útoku) to prvočíslo je. Takže B měla na počátku 23 b., po 1. útoku 10 b. Při druhém útoku přišla o 7 b., takže na konci měla 3 b. A musela být na počátku s b. na 2. místě, protože všechny kolonie (kromě E, která byla na 1. místě) měly 25 b. nebo míň (s 25 b. byla F na 3. místě). Součet b. na konci je 60, jelikož je to nejmenší společný násobek 15 a 20. Když už víme tolik informací, udělejme si tabulku:

	A	B	C	D	E	F	Součet
Na počátku	Mezi 26 a 34	23	18	16	28 nebo 35	25	148
Na konci	?	3	11	9 nebo 10	?	18	60

Pokud od 148 odečteme počáteční počty b. od kolonií, od kterých je známe jistě, tak nám vyjde 148 – (25 + 16 + 23 + 18) = 66, čili že na počátku A + E = 66. Pokud počet b. v E byl 28, tak v A mohlo být maximálně 27 b. V tom případě A + E může být maximálně 27 + 28 = 55, což je méně, než 66, takže E ≠ 28, takže E = 35. V tom případě A = 66 – E = 31.

Pokud od 60 odečteme koncový počet b. od kolonií, od kterých to víme jistě, tak nám vyjde 60 – (3 + 11 + 18) = 28 = A + D + E. Po svém prvním boji měla E o 2/7 méně b., to je 35 – (2/7)(35) = 25. Při útoku A na E, A přišla o 4 brouky méně, než E ⇒ ztráta A = ztráta E – 4 ⇒ ztráta (A + E) = ztráta (2E – 4), co musí být sudé číslo (2E je sudé, číslo 4 je také sudé). Před bitvou A x E, A měla 31 b. a E měla 25 b., co dává sudé číslo, proto na počátku (A + E) – ztráta (A + E) = na konci (A + E) = sudé číslo.

Protože na konci 28 = A + D + E a A + E = sudé číslo, tak D musí být také sudé číslo ⇒ D = 10. Proto A + E = 28 – 10 = 18.

Před bitvou A x E, součet A + E = 31 + 25 = 56. Po bitvě součet A + E = 18. Kdyby E přišla o tolik b., o kolik přišla A, na konci součet A + E = 22 (E by přišla o 4 brouky méně). Takže 56 – (2 krát ztráta A) = 22 ⇒ ztráta A = 17. Ztráta E tedy byla 17 + 4 = 21. Na konci E měla 25 – 21 = 4 b., A měla na konci 31 – 17 += 14 b.

Na konci měly kolonie takové počty brouků – A = 14; B = 3; C = 11; D = 10; E = 4 a F = 18

Damián

Úloha 4.

Víme, že 17 dřevorubců a 1 lilipután pokácí les za 168 h. Hodnoty dosadím do trojčlenky s nepřímou úměrností. Za 5 dní les pokácí 24 dřevorubců a 1 liliput.Když používají normální pily pokácí 82 stromů za den a celý les za 168 h. Když použijí staré pily (56 stromů/den), kácení bude trvat 246 h. V lese je 574 stromů.

Chroby

Úloha 5.

Ze zadání víme, že druhá kapitola je o 125% delší než první, to znamená, že $K_2 = 2,25K_1$. Přečíst celou knihu trvá 28 hodin (27 + 1), což je 28krát více, než je doba přečtení prvních dvou kapitol. To znamená, že $(K_1 + K_2)\cdot 28 = x$ (délka celé knihy). Za K_2 můžeme dosadit 2,25 $\cdot$ K_1 a dostaneme rovnici

$$(K_1 + 2,25K_1) \cdot 28 = x,$$

po úpravě zjistíme, že $x = 91\ K_1$.

Dále víme, že pokud by byla kniha o čtyři strany kratší, byla by čtyřicetkrát delší, než druhá kapitola. Tedy x – 4 = 40 $\cdot$ K_2 $\cdot$ K_2 znovu vyjádříme pomocí K_1 a dostaneme

$$x - 4 = 40 \cdot 2,25K_1,$$

po upravení $x = 90\ K_1 + 4$.

Srovnávací metodou dostaneme z obou rovnic jednu: 91 K_1 = 90 K_1 + 4, z čehož zjistíme, že první kapitola je dlouhá 4 strany. Celá kniha má délku $91 \cdot K_1$, tedy 91 $\cdot$ 4 = 364 stran.

Terka

Úloha 6.

Začneme tím, že si zapíšeme, kdy vyhraje Míša (řešení je možné provést i pro vztah pro výhru Péti) - $(ax+\frac{a}{x})b \geq 2ab$, protože a, b jsou kladná reálná čísla (tuto podmínku, i když je v zadání, je nutné při úpravách zmínit), můžeme součinem ab vydělit. Dostáváme nerovnici $x+\frac{1}{x} \geq 2$, vynásobíme x, které je rovněž kladné, $x^2+1 \geq 2x$. Převedeme vše na pravou stranu a upravíme na kvadrát $(x-1)^2 \geq 0$. Jak víme, kvadrát libovolného reálného čísla je větší nebo roven nule, tudíž jsme dokázali, že Míša vždy vyhraje.

Dále je zde druhá možnost, kterou zmínila pouze Barča Tížková - že Péťa může podíl vytvořit i druhým způsobem - $(ax+\frac{x}{a})b \geq 2ab$, což je trochu složitější možnost - opětovně můžeme podělit b a dostaneme se k $a^2x-2a^2+x = a^2(x-2)+x \geq 0$. Jako nejtriviálnější řešení se nabízí $x \geq 2$, protože pak je součin $a^2(x-2)$ kladný stejně jako x. Rovněž lze uvažovat opačný případ, kde je nicméně řešení složitější a vzhledem k složitosti použitých prostředků ho zde nebudu uvádět (pokud by někoho zajímal postup, pak může napsat na náš e-mail), výsledek je nerovnost $a \geq \sqrt{\frac{x}{2-x}}$ pro $x \leq 2$. Výraz pod odmocninou je nejméně nula, bohužel nelze stanovit jeho maximum, protože pro x blížící se k dvojce roste nad všechny meze.

Honza

Mocnost bodu ke kružnici

V tomto díle $\pi\rho$hu si řekneme něco o mocnosti bodu ke kružnici.

Co je to mocnost bodu ke kružnici?

Představme si, že v rovině je dána kružnice k a libovolný bod M ležící v její vnější oblasti. Nyní veďme přímku, která protíná kružnici k ve 2 různých bodech (říká se jí sečna kružnice k). Průsečíky sečny s kružnicí k označme X, Y.

Tvrzení o mocnosti bodu ke kružnici nám říká, že ať už si sečnu zvolíme jakkoliv, pak bude platit $|MX||MY| = k$, kde k je pro daný bod M konstantní (tzn. je závislé pouze na poloze bodu M). Dokonce platí, že pokud si zvolíme tečnu kružnice z bodu M, tak bude platit $|MX|^2 = k$.

Co by se stalo, kdybychom si bod M zvolili uvnitř? V tomto případě platí, že $k = -|MX||MY|$. Zmiňme snad i poslední případ, kdy bod M leží na kružnici, kdy zřejmě $k = 0$.

Není rovněž těžké dokázat, že mocnost k lze rovněž spočítat jako $k = v^2 - r^2$, kde v je vzdálenost bodu od středu kružnice a r je její poloměr.

K mocnosti bodu se vztahují ještě 2 pojmy, které se hodí znát - chordála a potenční střed. Chordála 2 kružnic je přímka, na které leží všechny body, které mají k těmto kružnicím stejnou mocnost. Pro chordálu platí, že je kolmá na přímku spojující středy kružnic. Potenční střed 3 kružnic je takový bod, který má ke všem třem kružnicím stejnou mocnost.

K čemu je nám to dobré?

Je dána přímka p a 2 různé body A, B, které leží v jedné polorovině s hraniční přímkou p. Sestrojte kružnici, která se dotýká přímky p a prochází body A, B.

Zkuste si tuto úlohu promyslet, popřípadě nám zaslat řešení. Napovím vám, že se tam někde bude vyskytovat mocnost bodu ke kružnici a taky se vám možná bude hodit znalost Euklidových vět.

Honza

Výsledkové listiny

Tady najdete jen několik nejlepších řešitelů, pro úplné výsledkové listiny se podívejte na naše internetové stránky.

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Natálie	Maleňáková	6	8	8	5	6	7	40	61
2.	Vilém	Jankovský	1	8	3	5	0	6	23	45
3.	Karolína	Štorchová	1	-	-	5	6	-	12	35

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Jan	Kačenka	3	-	8	5	3	7	26	60
2.	Jana	Kolenovská	6	-	8	5	6	-	25	50
3.	Tereza	Zelená	-	-	-	5	6	-	11	29

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Klára	Mořkovská	1	8	7	5	6	5	32	63
2.	Luboš	Bartík	6	8	7	5	6	7	39	60
3.	Thea	Kratochvílová	1	4	5	5	3	7	25	43

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.-2.	Bára	Tížková	-	8	8	5	6	7	34	74
	Jiří	Vala	6	8	7	3	6	7	37	74
3.	Jan	Havelka	6	8	6	5	6	6	37	71
4.	Jan	Preiss	6	1	8	5	6	7	33	70
5.	Berenika	Čermáková	6	-	4	5	6	7	28	62
6.	Denisa	Chytilová	-	8	5	5	6	7	31	57
7.	Adéla	Hanková	1	-	7	5	-	1	14	46
8.	David	Vranešic	-	-	-	-	-	-	0	15
9.	Dominik	Vrba	1	-	-	5	-	-	6	12