KOKOS

26.ročník ⋆ **1.leták**

Milý řešiteli!

Po letních prázdninách je tady náš 26. ročník matematického semináře KoKoS. Jako obvykle zde nalezneš sadu netradičních, avšak zajímavých matematických úloh doprovázených napínavým příběhem a Pirohem, který ti pomocí teorie usnadní řešení vybraných příkladů. Hned v této sérii Ti nabízíme účast na našich KoKoSových prázdninách (podrobnosti nalezneš na http://kokos.gmk.cz). Pokud budeš v našem semináři opravdu úspěšný a na konci školního roku se umístíš v celkovém pořadí na medailových pozicích, čekají tě pěkné ceny, které stojí za to!

Chceš poměřit své síly v rámci celé České republiky a zažít spoustu zábavy na našich soustředěních? Neváhej a pusť se do řešení! Nejdříve Ti ale doporučujeme přečíst si pravidla našeho semináře, kterými se každý správný KoKoSák za každých okolností řídí:

- KoKoS je celonárodní matematická korespondenční soutěž pro žáky 6. – 9. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.

- Ročník je rozdělen do pěti sérií. V každé sérii Ti zašleme leták se zadáním úloh. Ty je vyřešíš a pošleš nám je zpět. My je opravíme, ohodnotíme a zašleme Ti je zase nazpátek spolu se zadáním další série.

- Řešení nám můžeš posílat poštou, nebo přes internet. Poté, co se zaregistruješ do semináře, od nás e-mailem obdržíš přihlašovací údaje ke svému účtu. Pomocí těch se přihlásíš na **kokos.gmk.cz/login** a jednoduše nám svá řešení pošleš.

- Na řešení máš vždy několik týdnů. Toto je první série, jejíž uzávěrka je **3. listopadu**. Rádi bychom Ti dali více času, ale KOPR spěchá.

- Jednotlivé příklady piš na papíry formátu A4 nebo A5. **Na každý papír piš řešení pouze jednoho příkladu!** Více příkladů na jednom papíru nám přidává práci a vzhledem k počtu řešitelů se takovými řešeními nemůžeme a nebudeme zabývat!

- U každé úlohy připiš **do levého horního rohu** své jméno, příjmení, **číslo série a úlohy** a navíc i adresu k Tobě do školy nebo domů - podle toho, kam si necháváš zasílat opravená řešení.

- U každého příkladu musíš pečlivě vylíčit postup řešení. Uvedeš-li pouze výsledek nebo nezdůvodníš-li dostatečně své závěry, nemusíme Tvé řešení považovat za kompletní a úplné – zbytečně poté ztrácíš body!

- V zadání příkladu vždy nalezneš maximální počet bodů, který za něj můžeš získat. Pokud příklad nedokážeš vyřešit úplně, ale uděláš alespoň nějaký pokrok, přisoudíme Ti odpovídající část bodů. Maximální bodový zisk za jednu sérii je vždy 40 bodů.

- Do našeho semináře se můžeš přihlásit kdykoliv, i v průběhu roku. Také nemusíš nutně odeslat všechny série nebo úlohy (i když poté Tě asi ve výsledkové listině předběhnou usilovnější řešitelé). Vždy ale musíš před prvním odesláním řešení (tedy pokud KoKoS řešíš poprvé) **vyplnit internetovou přihlášku!** Tu najdeš na adrese *http://kokos.gmk.cz/prihlaska*. Pokud už jsi vyplnil přihlášku v minulých ročnících, nemusíš to dělat znovu. Řešeními, která odešleš, aniž by ses řádně přihlásil, se nezabýváme.

- Vyplatí se pravidelně sledovat naše webové stránky *http://kokos.gmk.cz*. Najdeš zde aktuální informace o průběhu soutěže a také diskusní fórum, které můžeš použít, nebudeš-li úloze rozumět apod. Pokud se v zadání některého příkladu objeví chyba, zveřejňujeme opravy právě na těchto stránkách.

- Pokud Vás bude z jedné školy více řešitelů, bylo by pro Vás i pro nás vhodné, abyste svá řešení posílali jednotně prostřednictvím školy, tzn. v jedné obálce. My Vám poté zašleme opravené úlohy zase zpátky v jedné obálce. Toto není závazná podmínka, ale šetříte sobě i nám práci i peníze. Děkujeme!

- Každý ročník (6. – 9.) má svou vlastní výsledkovou listinu, aby nižší ročníky nebyly znevýhodněny.

- Úspěšným řešitelem KoKoSu se stává ten, kdo získá za celý ročník 90 bodů a více.

Hodně štěstí a zábavy při řešení Ti přejí Tví organizátoři:
Dan, Jirka, Tomáš, Damián, Tomáš, Péťa, Míša, Honza, Majkl, Martin, Tomík a Terka

Zadání úloh

Ve třídě bylo naprosté ticho. Všichni seděli na místech skoro bez hnutí, někteří si ještě kontrolovali pravítka, tužky a kalkulačky, zatímco učitel pravidelným krokem přecházel po třídě a rozdával papíry. Jediný, kdo ani v nejmenším nevypadal, že by byl připravený na test, byla dívka sedící v zadní řadě, která se roztržitě přehrabovala v tašce a postupně z ní na lavici vytahovala svačinu, polámané pastelky, pokrčený sešit a další nepotřebné věci. „Hledáš něco, Lenko?!," zeptal se důrazně učitel matematiky a zatvářil se podle svého mínění velmi přísně. „Já… asi jsem nechala doma kalkulačku," zakoktala Lenka a kousla se do rtu. „Jako vždycky," poznamenal učitel. „Tak dobře, běž se podívat, jestli tu nemáme nějakou navíc, ale příště už dostaneš pětku."

Lenka beze slova vstala a zamířila ke skříni. Chvíli se přehrabovala v zásuvkách a ke svému vlastnímu štěstí objevila v jedné z nich jakousi velkou starou kalkulačku, která vypadala, že ji nikdo nepoužil už pěkně dlouho. Tlačítka byla zaprášená tak, že se jen stěží dala přečíst, ale Lenka byla ráda, že je zachráněna a honem si šla sednout na své místo, kde už na lavici leželo zadání testu. Pro Lenku však nebyla matematika nic těžkého, hned se vrhla na první příklad.

Úloha 1. (5 bodů): Vyřeš následující rovnici a proveď zkoušku

$$(x+1)\cdot(x+1) - x^2 + 3\cdot x\cdot 209 = \frac{8151}{13} - \frac{(x-1)^2}{x^2+2\cdot x+1}.$$

Lenka se pustila do počítání, po chvíli samozřejmě sáhla po kalkulačce. Oprášila z ní prach, takže teď bylo dobře vidět na displej, který kupodivu jasně svítil. Kalkulačka byla zapnutá a na obrazovce zářilo pět číslic. Lenka na ně chvíli zírala a přitom ji napadlo, že někdo před ní nejspíš zapomněl kalkulačku vypnout.

Nebo to není náhoda a ta čísla jsou nějaký zašifrovaný vzkaz? Lenka se při té myšlence úplně přestala soustředit na test a její představivost už pracovala na plné obrátky. Snažila se najít mezi čísly nějaké souvislosti, po chvíli to ale vzdala.

Úloha 2. (8 bodů): Existuje 5-ti místné číslo, které je dělitelné 11. Pokud si očíslujeme cifry zleva doprava od jedné do pěti, je 5. cifra o 1 menší než 4. cifra, 3. je 2, cifra 2. je druhou mocninа nějakého přirozeného čísla a 5. cifra je zároveň i prvočíslo. Víš, že čísla nemohou začínat nulou. Pokud si myslíš, že takové číslo neexistuje, nezapomeň to odůvodnit. V případě, že najdeš takových čísel více, je vypiš všechna.

Lenka o tom ještě hodnou chvíli přemítala. Pak těch pět číslic zkusila naťukat znova. A najednou se stalo něco nepochopitelného. Třída zmizela a Lenka, která se stále držela kalkulačky, měla najednou pocit, že se kolem všechno točí. Zároveň jí připadalo, že se kamsi propadá, a chtělo se jí příšerně zvracet…

***

Když se Lenka konečně zastavila, chvíli jí trvalo, než si uvědomila, že leží na zemi a pod sebou má jasně zelený trávník. Několikrát zamrkala, ale vypadalo to, že se jí to nezdá. Nad sebou viděla oblohu bez mráčku a všude okolo neslyšela nic, než úplné ticho.

Lenka se posadila a zjistila, že sedí na břehu nějakého jezera. Rozhlédla se kolem. Vypadalo to, že je na nějakém ostrově, kousek od ní byla ke kůlu přivázaná loďka. Dále si Lenka všimla, že na ostrově roste spousta rybízu, který neustále ujídali špačci.

Úloha 3. (7 bodů): Špačci sezobávají černý rybíz. První den sezobali x kuliček rybízu. Druhý den sezobali o 1/6 méně, než první den, třetí den snědli o 2/3 více, než druhý den a čtvrtý den o 1/6 méně, než třetí den, a tak dál. Kolik kuliček špačci sezobali první den, kolik dní kuličky zobali, kolik kuliček snědli celkem a kolik to bylo celkově kg, jestliže víme, že poslední den nasbírali 15625 kuliček rybízu, což bylo o 2/3 více, než předchozí den. Sbírali jenom celé kuličky, jedna vážila 2,3 gramu. První den sezobali méně, než 6000 kuliček.

Když se Lenka ujistila, že na ostrově nic jiného není, rozhodla se nasednout do loďky, kterou s menší námahou odrazila ke břehu. V dálce před sebou uviděla pevninu a doufala, že tam snad zjistí něco víc o celé té podivné situaci.

Úloha 4. (6 bodů): Řekněme, že by Lenka s loďkou vyplula v 17.20 rychlostí 20 km/h. Kdyby byla 5 km od břehu, a v tu chvíli by za ní vyjela jiná loď průměrnou rychlostí 40 km/h, dohonila by ji přímo na okraji druhého břehu. Jak daleko jsou od sebe oba břehy vzdáleny?

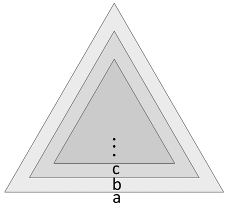
Lence bylo zpočátku divné, že nikde neviděla vesla. Jak za pár okamžiků zjistila, loďka se uváděla do pohybu úplně jinak. Vpředu bylo zvláštní ovládací zařízení, kterým se nejspíš měnila rychlost a směr.

***

Úloha 5. (6 bodů): Zařízení sestávalo ze dvou kružnic $k_1(A)$ a $k_2(B)$, které mají různé poloměry a protínají se v bodech C a D. Délka $|CD| = 3$ dm. Vzdálenost $|BD| = 4$ dm a vzdálenost $|AC| = 5$ dm. Víš, jaký by byl obsah trojúhelníku ABD, víme-li, že $|CS| = |SD|$ a $|AS| \neq |SB|$?

Za chvíli už Lenka uměla loďku řídit, jako by s ní jezdila odjakživa. Když se jí zdálo, že se k protějšímu břehu stále moc nepřibližuje, rozhodla se použít tlačítko, o kterém se domnívala, že zvýší rychlost.

Úloha 6. (8 bodů): Tlačítko mělo tvar rovnostranného trojúhelníku. Do sebe na něm bylo vkresleno 24 takovýchto trojúhelníků očíslovaných od 1 do 24. Délka strany největšího trojúhelníku je 100 mm. Délka strany menšího trojúhelníku je vždy o 1/10 menší než délka strany předchozího. Zjistěte, jaký je rozdíl mezi obsahy trojúhleníků s lichým očíslováním a těmi se sudým očíslováním.



„Tak co?“ zeptal se dychtivě. Zita se rozhodla, že před ním prozatím pomlčí o tom, co v domě našla. „Nikdo tam není, říkala jsem ti to,“ snažila se tvářit klidně a chytla bratra za ruku. „Tak už pojď.“

***

Lenka sebou trhla, jak loďka výrazně zrychlila. Vítr jí teď rozcuchával vlasy a pevnina před ní byla stále jasnější a zřetelnější. Za chvíli už jasně rozeznala to, co měla před sebou.

*Řešení úloh 1. série posílejte do **3.11.2012** na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 01 Bílovec

Zakousni se! $\pi\rho H$ POZNÁNÍ

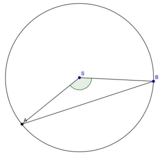
V tomto ročníku KoKoSu bude $\pi\rho h$ zaměřen na geometrii – můžete se těšit na zajímavé poznatky z geometrie, především poznatky o kružnici, kružnicích, útvarech, kterým lze opsat kružnice a o speciálních vlastnostech úhlů v kružnici, které rozhodně stojí za to znát! Pokud to bude možné, ke každé vlastnosti bude uveden důkaz a několik příkladů na procvičení.

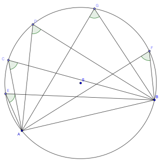
Úhly v kružnici

Úhlů je v kružnici mnoho, my se podíváme na některé velmi zajímavé, ale předtím, než tak učiníme, si musíme definovat základní pojmy – středový úhel a obvodový úhel.

Středový úhel

Mějme definovánu kružnici k se středem v bodě S a poloměrem r. Na ní si zvolme libovolně body A, B, které nesplývají. Potom středový úhel příslušný oblouku AB je takový úhel, jehož vrchol je střed kružnice S a jeho ramena procházejí body A a B.





Obvodový úhel

Mějme definovánu kružnici k se středem v bodě S a poloměrem r. Na ní si zvolme libovolně body A, B, které nesplývají. Potom obvodový úhel příslušný oblouku AB je takový úhel, jehož vrchol leží na kružnici k, nesplývá s body A, B, a jeho ramena opět procházejí body A, B.

Pokud se podíváme na libovolné body A, B (na kružnici), pak snadno dojdeme k závěru, že pro ně existuje nekonečně mnoho obvodových úhlů, ale pouze jeden středový úhel.

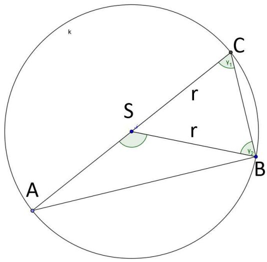
Konečně si můžeme říct kouzlo těchto úhlů:

Středový úhel příslušný k oblouku AB je roven dvojnásobku obvodového úhlu příslušného oblouku.

Důkaz

Tuto větu si dokážeme – důkaz rozdělíme na 3 situace, které postupně rozebereme, střed kružnice k leží na rameni obvodového úhlu, leží v obvodovém úhlu, leží vně obvodového úhlu.

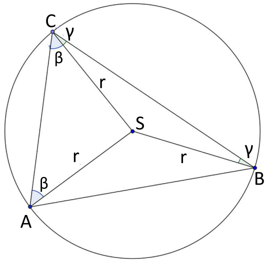
1. Střed kružnice leží na rameni obvodového úhlu



Uvažujme kružnici k se středem S a libovolným (nenulovým) poloměrem, body A, B a bod C tak, že C je průsečík polopřímky AS s kružnicí k. Chceme dokázat, že $|\sphericalangle ASB| = 2|\sphericalangle ACB|$.

Všimněme si trojúhelníku BSC – délky stran BS a SC jsou rovny poloměru kružnice k a jsou stejně dlouhé, takže trojúhelník SBC je rovnoramenný. Platí $|\sphericalangle SCB| = |\sphericalangle SBC|$. Součet úhlů v trojúhelníku je $180°$, a proto můžeme vyjádřit velikost úhlu BSC jako $|\sphericalangle BSC| = 180 - |\sphericalangle BCS| - |\sphericalangle SBC| = 180 - 2|\sphericalangle BCS|$. Dále víme, že součet úhlů CSB a ASB je $180°$, tudíž $|\sphericalangle ASB| = 180 - |\sphericalangle BSC| = 180 - (180 - 2|\sphericalangle BCS|) = 2|\sphericalangle BCS|$. Což je to, co jsme chtěli dokázat.

2. Střed kružnice leží v obvodovém úhlu



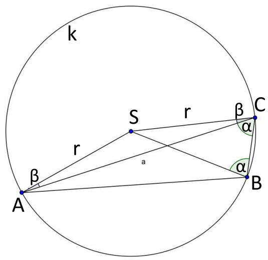
I v tomto případě využijeme podobného „triku“, ale tentokrát se podíváme na trojúhelníky BCS a ASC, v obou trojúhelnících mají vždy 2 strany délku poloměru, tudíž tyto trojúhelníky jsou rovnoramenné a dostáváme: $|\sphericalangle SAC| = |\sphericalangle SCA|$ a $|\sphericalangle SBC| = |\sphericalangle BCS|$, opět vyjádříme zbylý úhel ve zkoumaných trojúhelnících:

$|\sphericalangle ASC| = 180 - |\sphericalangle SAC| - |\sphericalangle ACS| = 180 - 2|\sphericalangle SCA|$

$|\sphericalangle BSC| = 180 - |\sphericalangle SCB| - |\sphericalangle SBC| = 180 - 2|\sphericalangle SCB|$

Poslední krok spočívá v tom, že si uvědomíme, že součet úhlů ASC, BSC a ASB je 360, z čehož můžeme vyjádřit úhel ASB jako $|\sphericalangle ASB| = 360 - |\sphericalangle ASC| - |\sphericalangle BSC| = 360 - (180 - 2|\sphericalangle SCA|) - (180 - 2|\sphericalangle SCB|) = 2(|\sphericalangle SCA| + |\sphericalangle SCB|)$, a $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ACS| + |\sphericalangle BCS|$, tudíž jsme opět dokázali, že i v tomto případě je středový úhel dvojnásobkem obvodového.

3. Střed kružnice leží mimo obvodový úhel

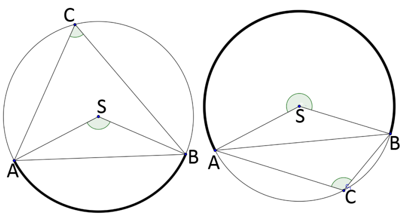


Obrázek se mění, finta zůstává – podíváme se na trojúhelníky BCS a ACS, které jsou rovnoramenné, pro přehlednost si úhly při základně v trojúhelníku BCS označím α a v trojúhelníku ACS β. Nejdříve bychom si měli uvědomit, že příslušný obvodový úhel má velikost $\alpha - \beta$, takže chceme dokázat, že $|\sphericalangle ASB| = 2(\alpha - \beta)$. Z trojúhelníku ACS vyplývá, že $|\sphericalangle ASC| = 180 - 2\beta$ a z trojúhelníku BCS, že $|\sphericalangle BSC| = 180 - 2\alpha$. Hledaný středový úhel ASC má potom velikost $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle ASC| - |\sphericalangle BSC| = (180 - 2\beta) - (180 - 2\alpha) = 2(\alpha - \beta)$, což je velikost, kterou jsme chtěli dokázat.

Tímto jsme dokázali velmi mocnou větu – **Středový úhel příslušný k oblouku AB je roven dvojnásobku obvodového úhlu příslušného oblouku**.

Jedním z jejích důsledků je, že všechny obvodové úhly příslušné oblouku AB jsou stejně velké (protože pro každý oblouk AB existuje pouze jeden středový úhel).

Jak mnozí z vás uhádli, pokud je středový úhel 180 stupňů (Úsečka AB je průměrem kružnice k), potom pro všechny body kružnice k, kromě bodů A, B platí, že jsou vrcholy pravého úhlu nad úsečkou AB - jedná se o tzv. Thaletovu kružnici (nad AB). Nyní si řekneme poslední věc, na kterou je třeba si dávat pozor - k libovolně zvoleným bodům A, B přísluší **vždy** 2 oblouky a těmto dvěma obloukům přísluší 2 různé obvodové úhly, nejlépe je to ukázat na obrázku.



Jak je vidět, obvodové úhly příslušící k menšímu oblouku jsou ostré a obvodové úhly příslušící k většímu oblouku jsou tupé. Poznámka – memotechnická pomůcka, jak si zapamatovat, jak to vlastně je – vrchol obvodového úhlu nikdy neleží v oblouku ke kterému náleží.

V příštím vydání PiRohu si řekneme o úsekových úhlech a o velmi zajímavém využití obvodových úhlů – řekneme si, jak zkonstruovat množinu bodů, ze kterých je úsečka vidět pod určitým úhlem.