KOKOS

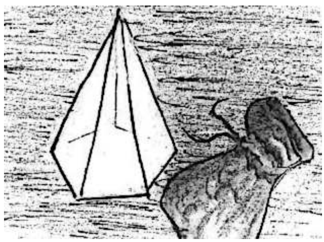
25.ročník ⋆ 4.leták

KOMA 2013

Milý řešiteli, po zdařilém jarním soustředění připravujeme další KoKoSovou akci. Tentokrát se bude jednat o KOMA, Koperníkův Matboj, což je netradiční matematická soutěž určena žákům 6. – 9. tříd a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Celá soutěž proběhne 12. června 2013 v prostorách Gymnázia Mikuláše Koperníka v Bílovci. Soutěžit mezi sebou budou pětičlenné týmy z různých škol. Úkolem týmů bude v daném čase vyřešit správně co nejvíce příkladů.

Přijďte změřit své matematické dovednosti v konkurenci dalších týmů z celé republiky. Na našich stránkách *http://kokos.gmk.cz/koma* nalezneš podrobnější informace a také přihlášku. Těšíme se na Tebe!

Zadání úloh



Když Albert otevřel trezor, jediné, co spatřil, byly tři malé kožené váčky natěsnané v rohu trezoru. Nedočkavě po nich hmátnul a jeden z nich otevřel. K jeho úžasu se na zem vysypalo pět drobných červených kamínků. „Poklad!“ vykřikl Albert, kterému oči málem vypadly z důlků. Spěšně otevřel druhý váček, ve kterém našel dalších pět drahokamů. „Kde se tady vzaly?“ napadlo ho, ale rychle to pustil z hlavy a otevřel třetí váček. Ten obsahoval pouze jediný drahý kámen, zato však největší ze všech. Albert zatajil dech. V drahokamech se sice příliš nevyznal, ale bylo mu jasné, že to, co právě objevil, musí mít neuvěřitelnou cenu. Poslední kámen měl tvar pětibokého jehlanu. Albert jej několik minut podrobně zkoumal a dokonce si pojmenoval jeho vrcholy.

Úloha 1. (6 bodů): Albert zjistil, že $ABCDEV$ je pravidelný pětiboký jehlan, s hlavním vrcholem V. Platí zde $AV = 10$, velikost úhlu $\angle AVB$ je $18°$. Na hraně AV je dán bod X tak, že $AX = 2,5$. Jak dlouhá je nejkratší cesta z bodu A do bodu X, pohybujeme-li se po povrchu jehlanu tak, že ho obejdeme dokola po plášti?

Po chvíli si Albert uvědomil, že nastal čas podzemí konečně opustit. Uložil celý poklad pečlivě zpátky do váčků a vydal se cestou, kterou doufal, že přišel. Zakrátko se však ukázalo, že cesta zpět nebude tak snadná. Všechny zdi vypadaly stejně, zdálo se

KoKoS, Gymnázium Mikuláše Koperníka, 17.listopadu 526, 743 01 Bílovec

mu, že chodí stále v kruhu. Stále znovu narážel na jakýsi čtyřúhelník nakreslený křídou na zeď a ať chtěl nebo ne, vždycky se u něj znovu ocitl. Ten čtyřúhelník už Alberta začínal pěkně štvát.

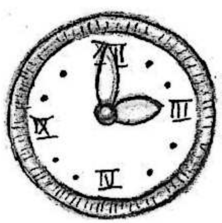
Úloha 2. (8 bodů): Sestroj takový čtyřúhelník $ABCD$, ve kterém platí, že vzdálenost bodu C od přímky BD je 4, $BD = 8$, velikost úhlu $\angle ABC$ je $90°$, $AC = 7$ a $BC = 5$.

Zita seděla v obývacím pokoji a bědovala. „Proč sis nemohl dát trochu pozor?“ podívala se vyčítavě na svého bratra. František mlčky přešlapoval na místě a tvářil se provinile. „Kde teď seženeme sedm tisíc? Tolik peněz nemáme a za pár dnů se vrátí rodiče.“ „Moc mě to mrzí“ zamumlal František. „Co budeme dělat?“ Zita nervózně pokrčila rameny. „Ty máš přece nějaké peníze našetřené, nebo ne?“ nadhodila. „No, to máš pravdu“ přikývl její bratr a na chvíli zmizel. Za chvíli se vrátil s dřevěnou pokladničkou. „Tady jsou moje úspory“ řekl a otevřel krabičku. K jejich velkému zklamání se uvnitř nacházelo jen několik mincí. Zita je rychle přepočítala. „Devadesát devět. Tomuhle říkáš úspory?“ utrhla se na Františka.

Úloha 3. (7 bodů): Kolika způsoby lze zaplatit 99 korun dvoukorunovými, jednokorunovými a dvacetikorunovými mincemi?

„No tak to jsme opravdu v koncích.“ povzdechl si František. „Babičce říct o tolik peněz nemůžeme, a když tomu prodavači do tří dnů nezaplatím škodu, bude si stěžovat rodičům.“ „Stejně si za to můžeš sám,“ mračila se Zita. „Neměl jsi být tak neopatrný.“ „Až příště půjdu někam v neviditelném obleku, dám si už pozor, slibuju.“ ujistil ji František. „Žádné příště nebude,“ řekla rázně jeho sestra. „S oblekem neviditelnosti jsme si užili dost. Hned zítra půjdeme a vrátíme ho tam, kde jsem ho našla.“ František vyvalil oči. „Ale dovnitř půjdeš sama! Já do toho domu nevlezu.“ „Klidně, já se totiž na rozdíl od tebe nebojím,“ zašklebila se Zita. „Mimochodem, kolik je hodin? Co nevidět tu bude babička.“ Oba naráz pohlédli na hodiny.

Úloha 4. (8 bodů): Na zdi v obývacím pokoji visely kruhové hodiny ukazující přesně 3 hodiny. Hodinová ručička měří 6 cm, minutová končí centimetr od okraje hodin. Konce obou ručiček jsou od sebe vzdáleny 10,82 cm. Jaký bude obsah kruhové výseče s poloměrem hodin, ohraničené oběma ručičkama za 100 minut?



Viktor a Adolf byli každou hodinu více a více znepokojení. Už nesčetněkrát se Albertovi pokoušeli bez úspěchu dovolat, několikrát zvonili u dveří jeho bytu, ale po jejich příteli nikde ani stopy. Ne, že by jim snad na Albertovi tak moc záleželo, šlo jim jen o to, že bez něj a jeho geniálních nápadů nemohli uskutečnit žádné svoje plány. Teď byli právě na cestě do restaurace U Černé kočky. „Třeba tam přece jenom bude.“ nadhodil Viktor s poslední špetkou naděje v hlase. „Nic jiného bych mu ani neradil.“ zavrčel Adolf, kterému začínala docházet trpělivost.

Vyšli po zaprášených schodech a ani je nepřekvapilo, že se v místnosti, kde se scházeli, nic nezměnilo. Na stole byly stále poházené Albertovy zápisky a poznámky, takže Viktor s Adolfem zcela ztratili naději, že jim tu snad Albert zanechal nějakou zprávu. „No výborně!“ rozkřikl se Adolf a vztekle smetl ze stolu několik papírů. „On se na nás asi úplně vykašlal.“ Viktor si prohlížel Albertovy zápisky. Samá čísla a výpočty. Nerozuměl tomu ani za mák, přesto nepřestával pátrat, jestli snad přece jen neobjeví něco, co by jim mohlo nějak pomoct.

Úloha 5. (6 bodů): Na jednom z papírů stálo: určete všechna dvojmístná přirozená čísla w, pro něž existuje právě šest celých čísel v tak, že výraz

$$\frac{v+w+64}{v+42}$$

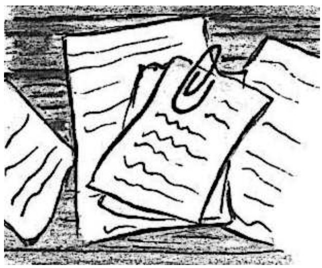
nabývá celočíselné hodnoty.

„Co si ty nesmysly tak prohlížíš?“ divil se Adolf. Viktor ho ignoroval a četl dál.

Úloha 6. (5 bodů): Zaujal ho další příklad, který zněl: kolik existuje pěticiferných čísel, jejichž ciferný součet je větší, než 5?

„Co se stalo, že se ti dneska tak třepou ruce, Zito?“ zeptala se babička. „A kde je vůbec František?“

Pak ale Viktor objevil něco, co ho nadchlo mnohem víc. „Podívej se na tohle!“ Zvedl několik hustě popsaných papírů sepnutých kancelářskou sponkou. „No a co?“ nechápal Adolf. „Takových nesmyslů je tady spousta.“ „Ty to nechápeš! Tohle je návod, jak vyrobit oblek neviditelnosti!“ Adolf pořád nechápal. „K čemu nám budou?“ „Můžeme je přece někomu prodat!“ vysvětloval Viktor. „A neuvěřitelně zbohatneme. Umíš si představit, kolik peněz bychom za tohle dostali? Nemuseli bychom do konce života pracovat!“ „Nepracujeme ani teď,“ poznamenal Adolf, Viktorův nápad se mu však náramně zalíbil. „Tak vezmi ty poznámky a jdeme,“ rozhodl. „Budou z nás boháči.“



Jak odcházeli, oba dva mlčeli, protože už si každý z nich v duchu plánoval, jak se jejich život naráz změní k lepšímu.

*Řešení úloh 4. série posílejte do **17.06.2013** na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 01 Bílovec

Autorská řešení 3. série

Úloha 1.

Délka filmu před úpravou … x
Délka filmu po úpravě … 135 min
Neupravovaných scén … $\frac{4}{7}x$
Zbývají $\frac{3}{7}x$, tyto scény je třeba rozdělit v poměru 2 : 1, příčemž zrychlených scén je o 10% více.
Scén zrychlených o 10% … $\frac{2}{7}x$
Scén zrychlených o 5% … $\frac{1}{7}x$
Délka scén byla upravena, proto započítáme pouze 90% z $\frac{2}{7}x$ a 95% z $\frac{1}{7}x$.
Když si nyní vyjádříme upravenou délku filmu, získáme rovnici

$$\frac{4}{7}x + \frac{90}{100} \cdot \frac{2}{7}x + \frac{95}{100} \cdot \frac{1}{7}x = 135.$$

Po úpravě

$$\begin{aligned} 400x + 180x + 95x &= 94500 \\ 675x &= 94500 \\ x &= 140 \text{ min}. \end{aligned}$$

Původní délka filmu byla 140 minut, upravováním bylo tudíž ušetřeno 5 minut.

Katka

Úloha 2.

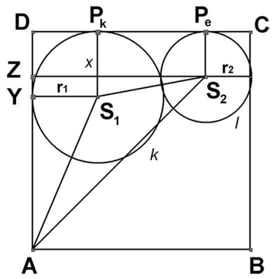
Hledaný obsah je roven rozdílu obsahu kruhu K o poloměru $|AB|$ se středem C a rovnostranného trojúhelníku $A'CD$. Výšku trojúhelníku vypočteme za pomocí Pythagorovy věty jako $v = \sqrt{|AB|^2 - |\frac{1}{2}AB|^2}$, po zjednodušení $v = \frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$.
Výsledný obsah dopočteme jako

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi|AB|^2}{3} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|^2}{2} \\ S &= (\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4})|AB|^2. \end{aligned}$$

Jirka

Úloha 3.

Budeme vycházet z náčrtku. Poloměr kružnice k si označíme r_1, poloměr kružnice l jako r_2. Nejdříve zjistíme délku strany čtverce, označme si ji a. Je zřejmé, že délka strany čtverce je dána jako součet poloměrů kružnic a úsečky XS_2. Tuto délku můžeme určit z pravoúhlého trojúhelníka S_1S_2X, kde je tato úsečka jednou z odvěsen. Délka strany S_1S_2 je součet poloměrů kružnic a délka strany XS_1 je rozdílem těchto poloměrů, tudíž délku úsečky XS_2 určíme podle Pythagorovy věty jako odmocninu z rozdílu kvadrátů těchto dvou stran.



$$|XS_2| = \sqrt{|S_1S_2|^2 - |XS_1|^2} = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2}$$
$$|XS_2| = \sqrt{(r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2) - (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2)} = 2\sqrt{r_1r_2}$$

$$a = r_1 + r_2 + |XS_2| = r_1 + r_2 + 2\sqrt{r_1r_2}$$
$$a = 25 + 2\sqrt{136} \text{ cm} \doteq 48,3 \text{ cm}$$

Nyní se pokusíme zjistit, jak je to s tou vzdáleností od bodu A a opět budeme používat pravoúhlé trojúhelníky – trojúhelník AS_1Y pro S_1 a AS_2Z pro S_2. Zřejmě $|S_1Y| = r_1$, $|AY| = a - r_1$ a $|S_2Z| = a - r_2 = |AZ|$. Hledanou vzdálenost opět určíme užitím Pythagorovy věty

$$|AS_1| = \sqrt{|AY|^2 + |S_1Y|^2} = \sqrt{(a - r_1)^2 + r_1^2}$$
$$|AS_1| \doteq 35,6 \text{ cm}.$$

Analogicky

$$|AS_2| = \sqrt{|AZ|^2 + |S_2Z|^2} = \sqrt{2 \cdot (a - r_2)^2}$$
$$|AS_2| \doteq \sqrt{2 \cdot (48,3 - 7)^2} \text{ cm} \doteq 57 \text{ cm}.$$

Honza

Úloha 4.
Máme 2 rovnice o třech neznámých:

$$a \;\; + b + 2c = 19$$
$$b + 2c + d = 17.$$

Existuje více metod řešení, můžeme například upravit druhou rovnici a použít srovnávací metodu:

$$a \;\; + b + 2c = 19$$
$$b + 2c + d + 2 = 19,$$

to znamená, že platí: $a + b + 2c = b + 2c + d + 2$, z čehož dostaneme $a = d + 2$. Tento vztah dosadíme do rovnice: $a + b + c + d = 18$, která vyplývá ze zadání. Dostaneme rovnici $b + c + 2d = 16$, kterou upravíme na $b + c + 2d + 1 = 17$. Po použití srovnávací metody na obě rovnice, kde je na pravé straně číslo 17, zjistíme, že $c = d + 1$.
Do rovnice $a + b + c + d = 18$ dosadíme za a a c získané vztahy a po úpravě dostaneme: $3d + b = 15$. Sestavíme si následující tabulku.

d	b	a	c	n.s. násobek
1	12	3	2	12
2	9	4	3	36
3	6	5	4	60
4	3	6	5	60

Ze zadání víme, že nejmenší společný násobek všech čtyř čísel je 36. Proto a = 4, b = 9, c = 3, d = 2.

Terka

Úloha 5.
Jde jen o to, umět si obě čísla součinu vhodně rozložit. Následující rovnosti jsou dle pravidel, které známe o mocninách, zřejmé a plyne z nich i řešení úlohy

$$32^{25} \cdot 25^{64} = 2^{125} \cdot 25^{64} = 2 \cdot 2^{124} \cdot 25^{64} =$$
$$2 \cdot 4^{62} \cdot 25^{64} = 100^{62} \cdot 2 \cdot 25^{2} = 1250 \cdot 100^{62}$$

Jelikož z posledního čísla, které odpovídá onomu součinu, lze jednoduše usoudit, že se ve výsledku vyskytují pouze tři číslice různé od nuly (nula totiž výsledek nemění), jednoduše určíme ciferný součet součinu jako součet 1+2+5 = 8.
Ciferný součet součinu $32^{25} \cdot 25^{64}$ tedy odpovídá číslu 8.

Anička

Úloha 6.

Tento problém se velmi těžko řeší pomocí kombinatoriky, protože to, že se různá otočení počítají jako jedno obarvení zaručují, že se situace budou víckrát opakovat. Nejschůdnější postup je si všechny možnosti vyjmenovat:

Pro použití jedné barvy: 3 možnosti

Pro použití dvou barev:

Poměr 1 : 5 – jedna možnost krát 6 možností výběru barev – 6

Poměr 2 : 4 – dvě možnosti (Barva zastoupená dvakrát je buď na sousedních nebo protilehlých stěnách.) krát 6 možností výběru barev – 12

Poměr 3 : 3 - Dvě možnosti (Buď dvě stěny obarveny jednou barvou jsou protilehlé nebo nejsou.) krát 3 možnosti výběru bravy – 6

Pro použití tří barev:

Poměr 1 : 1 : 4 – dvě možnosti (Barvy zastoupené jednou jsou buď vedle sebe nebo naproti.) krát tři možnosti výběru barev – 6

Poměr 2 : 2 : 2 – 5 možností (Barvy budou buď všechny naproti sobě, nebo stejné barvy vedle sebe, nebo dvě dvojice vedle sebe a jedna naproti, tu poslední možnosti musíme započítat 3 krát kvůli výběru barev.

Poměr 1 : 2 : 3 – 3 možnosti (Jedna pro barvu zastoupenou třikrát kolem jednoho vrcholu, a další dvě, pro barvu zastoupenou třikrát naproti sobě. Barva zastoupená jednou může být buď naproti barvě zastoupeně třikrát, nebo nemusí.) krát 6 pro výběr barev – 18

Celkem tedy 3+6+12+6+6+5+18=56.

Vasil

Rovnice vyšších stupňů

Kubické rovnice

V tomto PiRoHu se budeme věnovat rovnicím třetího stupně, neboli rovnicím kubickým.

Tyto rovnice mají obecně tvar: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Abychom mohli mluvit o kubické rovnici, koeficient a musí být nenulový, koeficienty b, c, d jsou z oboru reálných čísel.

Ze začátku bychom rádi připomněli, že u kubický rovnic je dobré uplatnit vzorečkový rozklad – pokud si všimnete, že rovnici lze napsat ve tvaru $(x + k)^3$ nebo je rovnice ve tvaru $x^3 - k = 0$, pak zkuste rovnici rozložit. Před tím, než se skutečně rozhodnete použít Cardanových vzorců, je lepší vyzkoušet i Hornerovo schéma. Tyto rozklady jsou jednodušší, než vzorce, které si zde ukážeme, nicméně nemusí fungovat vždy. Jedinou výhodou vzorců, které v tomto čísle budou popsány je to, že pokud kořeny těchto rovnic existují, pak je nalezneme **vždy**.

Kubické rovnice si opět rozdělíme na několik případů a ukážeme si hned několik způsobů, jak je řešit:

a) $b, c = 0$

Tento typ kubických rovnic je velmi jednoduchý, rovnici upravíme:

$$\begin{aligned} ax^3 + d &= 0 \text{ (d převedu na levou stranu)} \\ ax^3 &= -d \text{ (vydělím a)} \\ x^3 &= \frac{-d}{a} \text{ (odmocním)} \\ x &= -\sqrt[3]{\frac{d}{a}} \end{aligned}$$

Vzhledem k povaze třetí odmocniny nemusí být zlomek pod odmocninou nezáporný, to znamená, že **existuje** třetí odmocnina ze záporného čísla (a je to opět číslo záporné).

b) $d = 0$

Rovnice je ve tvaru: $ax^3 + bx^2 + cx = 0$, kterou vytýkáním x upravíme na tvar $x(ax^2 + bx + c) = 0$. Víme, že součin je nulový právě tehdy, když alespoň jeden z činitelů je nula, tudíž jeden z kořenů je nula. Další kořeny získáme

řešením kvadratické rovnice v 2. závorce, využít k tomu můžeme postupy, které jsme si ukázali dříve v seriálu.
Velmi podobné řešení by bylo i v případě $c = d = 0$, kde bychom vytkli x^2 a dostali dvojný kořen 0 a lineární rovnici, ze které bychom dostali ještě jeden další kořen.

Cardanovy vzorce

Nyní si ukážeme, jak nalézt alespoň 1 reálný kořen pro kubické rovnice, které splňují určité podmínky.

Rovnice, u kterých budeme hledat řešení jsou ve tvaru: $x^3 + px + q = 0$ (teprve po odvození řešení si ukážeme, jak rovnici do tohoto tvaru uvést).

Pro naše potřeby budeme uvažovat x jako součet 2 složek -$x = u + v$, potom dosadíme do kubické rovnice:

$$\begin{aligned} x^3 + px + q = 0 &\wedge x = u + v \\ (u+v)^3 + p(u+v) + q &= 0 \\ u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q &= 0 \\ u^3 + v^3 + (u+v)(3uv+p) + q &= 0 \ (1) \end{aligned}$$

Nyní stanovíme podmínku $3uv + p = 0$, tudíž člen $(u + v)(3uv + p)$ bude nulový. Tuto podmínku si trochu upravíme

$$\begin{aligned} uv &= -\frac{p}{3} \text{ , po umocnění na třetí} \\ u^3v^3 &= -\frac{p^3}{27} \end{aligned}$$

Tuto rovnici přidáme ke zbytku rovnice (1) a dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} u^3v^3 &= -\frac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 &= -q \end{aligned}$$

Další krok je v tom, že si „budeme přát“, aby u^3 a v^3 byly kořeny nějaké kvadratické rovnice, tzn. $0 = (t-u^3)(t-v^3)$. Pro zjednodušení zavedeme substituci $r = u^3$ a $m = v^3$.

Touto substitucí se nám soustava rovnic změní do tvaru:

$$u^3 + v^3 = r + m = -q$$

$$u^3v^3 = rm = -\frac{p^3}{27}$$

Po této substituci tyto vztahy připomínají něco o čem už jsme si v seriálu říkali – **Vietovy vztahy**. Tudíž kvadratická rovnice, která má kořeny r a m má tvar $t^2 - (-q)t + (-\frac{p^3}{27}) = 0$.
Abychom se dostali k tomu, co potřebujeme, použijeme trik doplnění na čtverec a odečteme to, co jsme do rovnice „přidali navíc“.

$$0 = (t^2 + qt + \frac{q^2}{4}) - \frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}$$

$$(t + \frac{q}{2})^2 = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} \text{ , nyní odmocníme}$$

$$t + \frac{q}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}$$

$$t = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} \quad (2)$$

Druhá odmocnina je definována pouze pro nezáporná čísla, tudíž $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$ musí být větší než nula. S výrazem pod odmocninou rovným nule počítat nebudeme.

Tuto kvadratickou rovnici jsme sestavili tak, aby jejími řešeními byly r a m, r a m jsou substituce, takže řešeními této kvadratické rovnice je $t_1 = u^3$ a $t_2 = v^3$.

Z rovnice (2) $t_1 = u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}$, $t_2 = v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}$
Nyní jsme již velmi blízko řešení, protože jsme na začátku předpokládali, že $x = u + v$ a nyní máme k dispozici u^3 a v^3.

$$x = u + v = \sqrt[3]{u^3} + \sqrt[3]{v^3} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}.$$

Poslední nezodpovězenou otázkou zůstává, jak se to má s počtem řešení této rovnice. U kubických rovnic, stejně jako u kvadratických, je zaveden pojem diskriminant kubické rovnice. Pro odlišení od diskriminantu kvadratické rovnice ho budeme značit D_3. Potom $D_3 = -27q^2 - 4p^3$. Nastat mohou následující tři situace.

- $D_3 < 0$, pak má kubická rovnice 1 reálný kořen.
- $D_3 = 0$, pak má kubická rovnice 1 jednoduchý kořen (ten určíme kardanovými vzorci) a jeden dvojnásobný kořen (poté, co dostaneme kořen pomocí kard. vzorců, dojde ke snížení stupně rovnice a tu poté řešíme) nebo 1 trojnásobný kořen (může jím být pouze 0).
- $D_3 > 0$, pak má rovnice 3 řešení, ale dokud neumíme pracovat v komplexních číslech, není možné je tímto způsobem určit.

Katka a Honza

Výsledkové listiny

Tady najdete jen několik nejlepších řešitelů, pro úplné výsledkové listiny se podívejte na naše internetové stránky.

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Tereza	Zelená	-	-	-	-	-	-	0	20

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Klára	Mořkovská	8	4	5	7	0	4	28	92
2.	Matouš	Petřík	-	-	-	-	-	-	0	31

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Jan	Preiss	8	2	2	7	6	2	27	99
2.	Berenika	Čermáková	8	-	2	5	-	-	15	95
3.	Bára	Tížková	8	3	6	7	0	-	24	82
4.	Adéla	Hanková	8	2	6	7	6	1	30	81
5.	Dominik	Vrba	8	0	6	7	0	1	22	65
6.	Jan	Havelka	-	-	-	-	-	-	0	45
7.	Kateřina	Zástěrová	-	-	-	-	-	-	0	43
8.	Michal	Kresta	3	-	6	7	6	1	23	42
9.	David	Vranešic	-	-	0	2	-	-	2	19
10.	Aneta	Fajstlová	1	0	1	7	-	-	9	9
11.	Lukáš	Nohejl	-	-	-	-	-	-	0	8
12.	Eliška	Mrhová	-	-	-	-	-	-	0	3

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Alžběta	Maleňáková	8	5	6	5	6	4	34	113
2.	Damian	Waloszek	8	5	5	7	-	-	25	107
3.	Eliška	Červenková	8	2	6	2	6	4	28	106
4.	Adam	Poloček	8	4	6	2	0	1	21	86
5.	Filip	Oplt	8	3	-	-	-	-	11	58
6.	Martin	Karlík	-	-	-	-	-	-	0	47
7.	Tomáš	Nguyen	-	-	-	-	-	-	0	43
8.	Markéta	Machalová	-	-	-	-	-	-	0	34
9.	Tomáš	Bajer	-	-	-	-	-	-	0	17
10.	Anežka	Salátová	-	-	-	-	-	-	0	9
11.	Johana	Koberová	-	-	-	-	-	-	0	4