KOKOS

24.ročník ⋆ 4.leták

Jarní soustředění

Milý řešiteli, abychom Ti ještě více přiblížili náš korespondenční seminář KoKoS a zároveň ocenili Tvou snahu, připravujeme pro Tebe (a samozřejmě i další řešitele) jarní soustředění! Můžeš se těšit na 4 dny nabité zajímavými přednáškami, hrami a spoustou zábavy. Témata přednášek budou z různých oblastí přírodních věd, na výběr budeš mít přednášky z matematiky, fyziky či astronomie. Čeká tě taky seznámení s programovatelnými roboty a magnetickou kapalinou.

Soustředění proběhne ve dnech 12. dubna – 15. dubna po velikonočních prázdninách. Již tradičně se koná v budově Domova mládeže při Gymnáziu Mikuláše Koperníka v Bílovci pod pedagogickým dohledem za organizace studentů gymnázia.

Cena, pro letošek stanovená na 200 Kč, zahrnuje veškerý program včetně stravy a ubytování. Pokud máš jakékoliv otázky, neváhej se obrátit na náš email *gmkkokos@seznam.cz*, kde Ti rádi všechno vysvětlíme. Pokud je Ti vše jasné, vyplň naši internetovou přihlášku, kterou najdeš na *http://kokos.gmk.cz/soustredeni-prihlaska*. Poté, co ji obdržíme, Ti do několika dnů zašleme email s podrobnými informacemi. Těšíme se na Tebe!

Organizátoři

Zadání úloh

Množství citoslovcí, které nelze sluchem zaznamenat a ani Nietzscheho nadčlověk by je nedokázal zapsat na papír, naprosto otupilo veškeré Anežčiny smysly. A Kuba na tom nebyl o nic lépe.

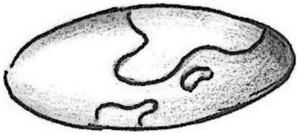
Úloha 1. (8 bodů): Těch citoslovcí bylo opravdu hodně a kdyby je někdo v té chvíli dokázal spočítat, došel by k závratnému deseticifernému číslu. Toto číslo mělo hned několik zajímavých vlastností. Bylo složeno z číslic 0 až 9, přičemž se každá vyskytovala nanejvýš jedenkrát, a dále platilo, že číslo tvořené z:

- prvních dvou číslic zleva je dělitelné dvěma
- prvních tří číslic zleva je dělitelné třemi

- prvních čtyř číslic zleva je dělitelné čtyřmi
- prvních pěti číslic zleva je dělitelné pěti
- prvních šesti číslic zleva je dělitelné šesti
- prvních sedmi číslic zleva je dělitelné sedmi
- prvních osmi číslic zleva je dělitelné osmi
- prvních devíti číslic zleva je dělitelné devíti
- všech deseti číslic je dělitelné deseti

Dokážeš takové číslo najít?

Tlaková vlna, která následovala duhovou kuličku, pak všechny přítomné srazila k zemi. „Asi to zase nevyšlo,“ pronesl Kuba, zatímco se snažil vydrápat zpátky na nohy.

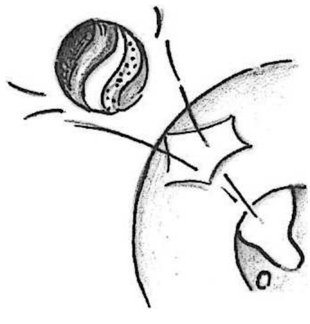


„Jak jsi na to přišel?“ Zeptala se teď už značně naštvaná Anežka. Ale stále ještě trochu omámený hoch nepoznal jasnou ironii, s níž dívka otázku pronášela, a tak s vážnou tváří odpověděl: „Tak se podívej na tu postel, pořád je stejně tvrdá a malá, ani trochu se nezměnila. Další věcí, která mě k tomu vede, je pak složitost toho kouzla. Abych řekl pravdu, něco tak komplikovaného jsem ještě nikdy nezkoušel.“ Anežka ale nečekala na Kubovu odpověď a již na jejím začátku se zvedla na nohy a začala se rozhlížet po okolí.

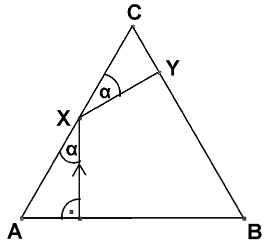
„Nevidím žádné změny, s trochou štěstí jsi nezpůsobil nic závažného,“ řekla mírně zamyšlená dívka. Po chvíli ještě dodala: „Ale dneska už tě žádná další kouzla provádět nenechám.“

„A proč ne?!“ Optal se hoch. „Co se asi tak může stát?“ „No právě v tom je ten problém. Nikdo neví, co se může stát.“ Oba se na pro někoho až moc dlouhou chvíli odmlčeli a zamyšleně koukali do okolní zasněžené krajiny.

Co dané kouzlo vlastně způsobilo? Na to, jak bylo složité, byl jeho výsledek možná až příliš fádní. Cílem kouzla bylo vytvořit duhovou skákací kuličku. Pro nás je to věc naprosto obyčejná, ale na Kubově a Anežčině planetě skákací kuličky vůbec nemají, natož pak nějaké v duhových barvách. Jenže planeta byla příliš malá a kulička vyrazila do světa příliš velkou rychlostí. To vše spolu se současným směrem letu hopíku nakonec způsobilo proražení oné skleněné vánoční koule, která v současnosti obsahovala planetu, a duhová kulička se tak vydala na planetu Zemi. Kubova a Anežčina planetka vypadla z rozbité skleněné koule na zem, kde na ni nešťastnou náhodou někdo šlápnul, což změnilo její tvar z kulatého na placatý.



Úloha 2. (6 bodů): To překvapilo pavouka, který vše sledoval z povzdálí. Ještě více ho však překvapilo, co se stalo na jeho pavučině. Ta měla tvar rovnostranného trojúhelníku o délce strany 8 cm (viz obrázek). Jedna muška na hraně této trojúhelníkové pavučiny uvízla, a to ve vzdálenosti 3 cm od vrcholu. Podařilo se jí ale vyprostit a kolmo ke hraně vyrazila vzhůru. Poté se odrazila od další hrany (v bodě X) pod stejným úhlem, pod jakým „dopadla“ a po chvilce letu narazila na třetí hranu (v bodě Y), kde se zachytila a uvízla. Jaká je vzdálenost mezi body X a Y?



Celá planeta i se všemi jejími obyvateli se nějakou dobu otřásala a vydávala skoro až nepředstavitelné zvuky. Anežce to připadalo jako věčnost. Ale i tento planetární neklid se po jistém blíže neurčitelném čase uklidnil. „Co to bylo?!“ Vyjekly obě děti najednou a přitom na sebe nevěřícně zíraly. Nepocítily však žádnou změnu a kolem nich vypadalo vše tak, jako obvykle (až na ten sníh, ale na to už si také zvykly).

„Ty otřesy, hromobití… to není normální,“ říkala Anežka Kubovi, zatímco se stále ještě rozhlížela po okolí a hledala nějakou na pohled patrnou katastrofu.

„Myslíš, že za to může to moje kouzlo?“ Optal se Kuba, nyní již trochu vyděšený svým pravděpodobným činem.

„A ty si myslíš, že ne?! Jen doufej, že se nestalo nic závažného,“ říkala dívka zrovna ve chvíli, kdy celou planetu zahalila tma.

Obě děti okamžitě vyjekly, chytily se za ruce, sedly si na zem a vystrašeně čekaly, co se bude dít dále.

„Nevidím žádné hvězdy, ani žádný z našich měsíců,“ konstatovala po chvíli Anežka. „Zajímalo by mě, co jsi to vlastně provedl a co s tím teď hodláš dělat!?“

„Nooo, tak mám jeden nápad. Myslím si, že je skvělý, ale tobě se líbit nebude.“ povídá Kuba s šibalským úsměvem na tváři, který však přes naprostou tmu nemůže dívka postřehnout. „Můžu zkusit zpětné kouzlo.“

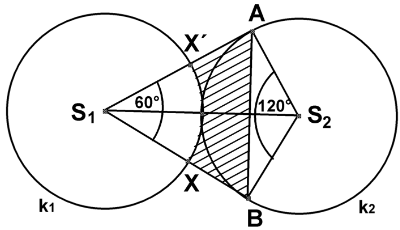
„V žádném případě!“ Ukončila dívka diskuzi. A kromě tmy tak děti pohltilo i ticho.

Co se s danou planetou vlastně stalo? To, že se z ní stala placka už víme. Ale co nevíme je to, že dítě, které s onou skleněnou vánoční koulí předtím třepalo a kterému se rozbila v rukou, si tu placatou planetu vzalo z podlahy, strčilo do kapsy, čímž ji zahalilo do naprosté tmy, a odešlo s ní domů, kde ji z kapsy opět vytáhlo a následně položilo na poličku, jako by to byl nějaký sběratelský kousek hodný obdivu.

Kubovi však vůbec nevadilo, že se Anežce jeho nápad nelíbí. Říkal si, že když se trochu vzdálí, Anežka si ani nevšimne, že už zase čaruje. A tak nenápadně poodešel a začal se zvratným kouzlem. Právě když jej dokončil, osvětlilo jejich planetu zase světlo. „Povedlo se! Já věděl, že se to povede!“ Křičel Kuba na všechny strany. Anežce chvíli trvalo, než si uvědomila, co vlastně Kuba říká, neboť byla zaskočena vším, co se v posledních chvílích stalo. Když jí to konečně došlo, hodila po Kubovi jen rozhořčený výraz, následně se otočila a neřekla ani slovo. Byla totiž ráda, že je vše tak, jak má být (nebo se alespoň jeví tak, jak má).

Kuba však vůbec nezpůsobil osvětlení planety. To zapříčinilo pozemské dítě, které ji shodou okolností právě v tu chvíli vytáhlo ze své kapsy a položilo na poličku, kam dopadalo světlo ze Slunce.

Úloha 3. (8 bodů): Dítě mělo na té poličce spoustu trofejí. Taky bychom tam našli obrázek s náčrtem dvou kružnic k_1 a k_2, se středy S_1 a S_2 o průměrech 10 cm, které se navzájem dotýkají (viz obrázek). Na kružnici k_2 ležely body A, B. Spojnice těchto bodů byla kolmá na spojnici středů. Úhly AS_1B a AS_2B byly po řadě $60°$ a $120°$. Dokázal bys spočítat obsah vyšrafované plochy $ABXX'$?



Kouzlo se mu samozřejmě povedlo, jako všechna ostatní, a tak způsobil zmizení skákací duhové kuličky, kterou předtím vytvořil. To mělo za následek smutek v duši jednoho pozemského človíčka, kterého zaplavila vlnou štěstí nová hračka objevená zcela náhodou na zemi v jeho oblíbeném parku.

Brzy se setmělo a Anežka si začala připadat velice nesvá. Koukala se kolem sebe, ale vše jí připadalo normální. Po chvíli se zadívala na oblohu a zůstala nevěřícně stát s pusou otevřenou dokořán tak moc, že by se jí tam snad vešel i tenisový míček. „To nemůže být pravda. Cos to vlastně provedl?“ Křičela na Kubu s pohledem stále upřeným k nebi.

Kuba také zvedl hlavu, ale vůbec nechápal, o čem dívka vlastně mluví. A tak jí položil prostou otázku: „Co jsem zase udělal?“

„Ty nevidíš ty hvězdy?! Jsou úplně jiné. Žádné z těch souhvězdí nepoznávám. Ty snad některé z nich znáš?“

„Já neznám vůbec žádné souhvězdí. Jak bych asi tak mohl znát nějaké neznámé?“

„O to právě jde. Jestliže jsou okolo neznámá souhvězdí, tak jsi nejspíš zajistil přesun naší planety!“

Úloha 4. (5 bodů): Anežka si všimla podivného souhvězdí, jehož hvězdy byly rozmístěny v trojúhelníku. Vrcholy tohoto trojúhelníku tvořily po řadě růžová, fialová a modrá hvězda. Kdybychom vedli z pomyslného vrcholu, kde byla růžová hvězdička, výšku, tak bychom na patě výšky nalezli žlutou hvězdu. Uprostřed mezi růžovou a fialovou hvězdou byla zelená a taktéž uprostřed mezi fialovou a žlutou hvězdou se nacházela oranžová. Anežka se zamyslela nad tím, jakou plochu by zabíral čtyřúhelník tvořen růžovou, zelenou, žlutou a oranžovou hvězdou, kdyby vzdálenost mezi růžovou a fialovou byla 16 ly a mezi fialovou a žlutou 12 ly. (Odpověď vyjádři v zadaných jednotkách, tedy ve světelných letech – ly.)

„FÍÍÍHA. To už je něco. Takové kouzlo jen tak někdo nezvládne.“ radoval se chlapec a celá jeho tvář se rozzářila jako právě zapálená zápalka.

„Pravděpodobně si to zatím neuvědomuješ, ale tohle je závažná věc, která si jen tak neroztaje za pár dní jako ten sníh všude okolo.“

„No jo, vždyť už hledám nějaké kouzlo, kterým to napravím.“

„Kouzlo??? To snad nemyslíš vážně.“

Úloha 5. (9 bodů): Kuba ihned začal hledat ve svých knihách, a přestože jich měl opravdu hodně, stačilo mu podívat se do jedné a okamžitě našel, co hledal. Jenže kouzlo bylo rozděleno na několik částí, každá na jiné stránce. Vodítkem mu byla soustava rovnic, ze které potřeboval určit a, b, c, x a y, které představují čísla stránek s jednotlivými kusy kouzla.

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2x \\ 2a + b + 2c &= 4y \\ 7a + 2b + c &= xy \end{aligned}$$

K vyřešení mu stačilo znát, že se x a y vzájemně nerovnají a odpovídají některému z a, b nebo c. Dále věděl, že x je největší a y druhé největší z čísel a, b, c. Věděl také, že a, b, c jsou různá přirozená čísla. Kuba si nad tím chvilku lámal hlavu, dokázal bys mu poradit?

Úloha 6. (6 bodů): Přestože Kuba našel všechny části kouzla, musel ještě vyřešit záhadnou hádanku, aby mohl kouzlo uskutečnit. Existuje množina lidí s několika podmnožinami. Každá podmnžina má jméno po nějakém člověku, žádné dvě podmnožiny se nejmenují po témž člověku a po každém člověku je pojmenována nějaká podmnožina. Není nutné, aby člověk byl členem podmnožiny po něm pojmenované. Pokud je jejím členem, říkáme mu čestný člověk, pokud není jejím členem, říkáme mu nečestný člověk. Na téhle množině je zajímavé to, že všichni nečestní lidé tvoří jednu podmnožinu. Je to pravda?

„Aaaa, tady to je.“ řekl chlapec a dál už s ničím neotálel a začal čarovat dřív, než ho dívka stačila přerušit, byť jen jediným slůvkem.

Anežka tedy bezradně čekala a pozorovala Kubu u jeho oblíbené činnosti, čarování. Jednou nás všechny zabije, to a spousta podobných věcí se zrovna honila dívce hlavou, když Kuba dokončil své kouzlo. Následně, a bylo to vůbec poprvé v historii všech přítomných, se Kubovi doopravdy podařilo to, co zamýšlel. Vrátil jejich planetu na její původní místo ve vesmíru. Což zanedlouho způsobilo velice zmatený výraz v očích pozemského dítěte, které hledalo svou novou hračku již dříve odloženou na poličku. To, co se však hochovi změnit nepodařilo, byl placatý tvar jejich planety. O něm však zatím Kuba ani Anežka nemají ani to nejmenší tušení.

Řešení úloh 4. série posílejte do ***30.3.2012*** *na známou adresu:*

KoKoS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 01 Bílovec

Autorská řešení 3. série

Úloha 1.

Vyjádříme si objemy jednotlivých částí bonbónu:
Objem polokoule … $V_p = \frac{2}{3}\pi \cdot r^3$
Objem kužele … $V_p = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot v_k$
Objem válce … $V_p = \pi \cdot r^2 \cdot v_v$
Vyjádříme objem celého bonbónu: $V_p = \frac{1}{3}\pi r^2 v_k + \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 v_v$

Ze zadání víme, že objem kužele se rovná objemu polokoule. Ve výrazu můžeme tudíž pro zjednodušení zapsat objem polokoule dvakrát:

$$V_p = \frac{1}{3}\pi r^2 v_k + \frac{4}{3}\pi r^3$$

Dále víme, že objem je maximálně 320 cm^3, sestavíme proto následující nerovnost:

$$\frac{1}{3}\pi r^2 v_k \frac{4}{3}\pi r^3 \leq 320$$
$$\pi r^2 v_k 4\pi r^3 \leq 960$$

Mnoho z vás nyní výšku kužele v tichosti ztratilo (nebo ji určilo jako nulovou), my si ji místo toho vyjádříme jako

$$v_k \leq \frac{960 - 4\pi r^3}{\pi r^2}$$

a provedeme následující úvahu. Bonbón válcovou část obsahuje, výška válce proto musí být větší než nula. Jmenovatel zlomku je číslo kladné, musíme tedy zajistit, aby byl kladný také čitatel:

$$960 - 4\pi r^3 \geq 0$$
$$4\pi r^3 \leq 960$$
$$r \leq \sqrt[3]{\frac{960}{4\pi}}$$

Z tohoto vztahu získáme omezení pro jeho největší možnou hodnotu $r \leq 4,24$.
Z toho plyne, že největší možný průměr kruhového průřezu bonbónu je 8 cm.

Katka

Úloha 2.

Příklad budeme řešit tak, že vyjádříme délky obou tras a porovnáme je.
Cesta z A do B po plné čáře se skládá ze tří částí − čtvrtkružnice, půlkružnice a úsečky. Jejich délky určíme následovně:
Čtvrtina kružnice o poloměru $\frac{3}{2}a \ldots \frac{1}{4}(2\pi\frac{3}{2}a) = \frac{3a\pi}{4}$
Polovina kružnice o průměru $a \ldots \frac{1}{2}(\pi a) = \frac{\pi a}{2}$
Přepona v pravoúhlém $\triangle$ s odvěsnami $\frac{3}{2}a$ a $\frac{1}{2}a \ldots \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{4}} = \sqrt{\frac{10a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$
Celková délka trasy po plné čáře $\ldots frac3a\pi4 + \frac{\pi a}{2} + \frac{a\sqrt{10}}{2} = a(\frac{5\pi+2\sqrt{10}}{4})$
Cesta z A do B po tečkované čáře se skládá ze tří půlkružnic o průměru a.
Délka této trasy $\ldots \frac{3}{2}(a\pi)$
Oba mravenci běží stejnou rychlostí, proto pokud by měl jeden z nich doběhnout dvakrát rychleji, musel by mít dvakrát kratší trasu. Z toho plyne, že poměr délek tras je stejný jako poměr časů, za které je mravenci urazí. Určíme tedy poměr trasy tečkované a plné. Pokud se bude výsledek rovnat jedné polovině, nebo číslu menšímu, doběhne mravenec za čas minimálně dvakrát kratší.

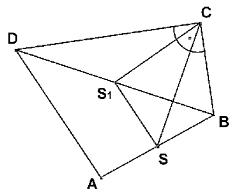
$$\frac{\frac{3a\pi}{2}}{\frac{a(5\pi+2\sqrt{10}}{4}} = \frac{12a\ \pi}{2a(5\pi+2\sqrt{10}} = \frac{6\pi}{5\pi+2\sqrt{10}}$$

Pokud získaný poměr vyčíslíme, dostaneme číslo větší než jedna polovina, konkrétně 0,85. Z toho plyne, že mravenec běžící po kratší (tečkované) trase nedoběhne dvakrát rychleji.

Katka

Úloha 3.

S_1 je střed BD, potom platí: $|SS_1| = \frac{1}{2}|AD|$, protože úsečka SS_1 je střední příčkou v $\triangle ABD$. Protože $\triangle BCD$ je pravoúhlý a S_1 je střed přepony, platí $|CS_1| = |DS_1| = |BS_1| = \frac{1}{2}|BD|$.
Z trojúhelníkové nerovnosti v $\triangle SS_1C$:



$$|SC| < |SS_1| + |S_1C|$$
$$2|SC| < |AD| + |BD|$$

Rovnost by nastala v případě, kdy by všechny tři body S, S_1, C ležely na jedné přímce.

Pája

Úloha 4.

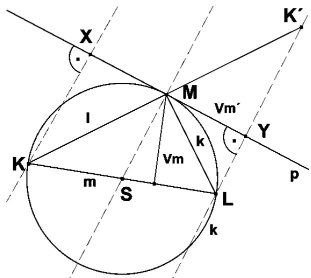
Sepíšeme si dvě rovnice o dvou neznámých — obvod O původního koláče a počet n všech kousků koláče. Postupujeme podle zadání — průměrná délka kůrky je 20 cm. Když toto číslo vynásobíme počtem kousků, dostaneme obvod: $O = 20n$. Po odebrání jednoho kousku se obvod koláče zmenší o čtvrtinu a průměrná délka kůrky jednoho kousku se zmenší na 19. Stejně jako v prvním případě si sestavíme rovnici: $\frac{3}{4}O = 19(n-1)$.
Z první rovnice si vyjádříme počet prvků n a dosadíme do druhé rovnice, tu následně upravíme a vyjde nám, že $O = 95$ cm.

Druhý způsob řešení je uvědomit si, že když se po odebrání jednoho kousku koláče obvod zmenší o čtvrtinu, museli jsme odebrat právě čtvrtinu koláče. Poté dojdeme ke sporu, že koláč má 4,75 kousků, což není možné. Výsledkem by tedy bylo, že úloha nemá řešení.
Oba výsledky jsem uznával, matematicky korektní je však jen výsledek druhý.

Jiřík

Úloha 5.

Ze zadání si určíme následující údaje, ze kterých budeme dále vycházet:
$KX \parallel SM \parallel LY \Rightarrow$ bod M je středem XY,
protože S je středem úsečky KL
$|XM| = |MY|$
Použijeme středovou souměrnost (viz Piroh ve 2. sérii):
$S_M : X \to Y$
Řešení pak vypadá následovně:
$S_M : K \to K'$
K' leží na přímce $KM \Rightarrow |KM| = |MK'|$
Trojúhelníky KLM a LMK' jsou shodné podle věty *sus* (velikost úhlu KML se rovná LMK')
$\Rightarrow v_m = v_m \Rightarrow |XY| = 2v_m$



Nyní porovnáním obsahů vypočteme výšku pomocí odvěsen:

$$S_1 = S_1'$$
$$\frac{|KL| v_m}{2} = \frac{kl}{2}$$
$$\frac{v_m\sqrt{k^2+l^2}}{2} = \frac{kl}{2}$$
$$v_m = \frac{kl}{\sqrt{k^2+l^2}}$$

Vzdálenost $|XY|$ je dvojnásobek výšky:

$$|XY| = \frac{2kl}{\sqrt{k^2 + l^2}}$$
$$|XY| = 9,23cm$$

Péťa

Úloha 6.

Uvažujme pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C a zobrazení ze zadání, kde se body A, B, C zobrazí po řadě na body A', B' a C'. Podle věty sus jsou trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ shodné. Mají tedy stejnou výšku vedenou z vrcholu C. Dále víme, že úsečka CC' má dvojnásobek této délky. Z toho vyplývá, že výška v trojúhelníku $A'B'C'$ vedená z vrcholu C' má trojnásobek velikosti výšky v trojúhelníku ABC vedené z bodu C. Dále víme, že velikosti AB a $A'B'$ se rovnají. A jestli se rovnají a pro výšky na tyto strany platí, že jedna je třikrát větší, pak i obsah většího trojúhelníku je trojnásobný, tedy 3 cm^2.

Vasil

Zakousni se!

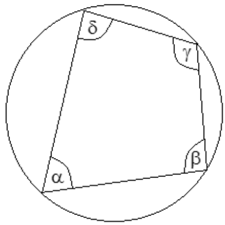
Tečnové a tětivové čtyřúhelníky

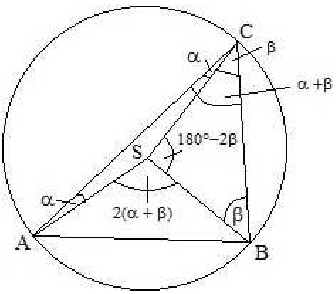
Co platí a proč?

V tomto dílu bychom vás rádi seznámili se dvěma speciálními čtyřúhelníky, a to čtyřúhelníkem tětivovým a čtyřúhelníkem tečnovým. V těchto čtyřúhelnících platí vztahy, které se dají velmi často využít při řešení geometrických úloh. My si tyto vztahy nejenže uvedeme, ale také dokážeme, že skutečně platí.

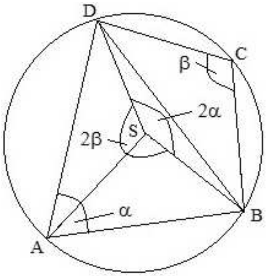
Tětivový čtyřúhelník

Tětivový čtyřúhelník je takový čtyřúhelník, kterému se dá opsat kružnice.
Pro tětivový čtyřúhelník platí, že součet protějších vnitřních úhlů se rovná 180°.
Tento vztah můžeme zapsat jako $\boldsymbol{\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ}$.
K důkazu tohoto tvrzení je potřeba znát obvodové a středové úhly. Proto si nejprve ukážeme, co pro tyto úhly platí.



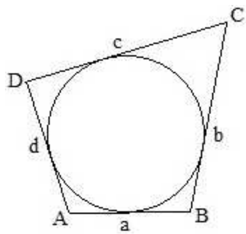


Jestliže jsou body A, B, C libovolné body kružnice se středem S, pak jsou poloměry AS a BS ramena středového úhlu ASB a polopřímky CA a CB ramena obvodového úhlu ACB. Platí, že velikost středového úhlu se rovná dvojnásobku velikosti úhlu obvodového.
V případě našeho obrázku tedy platí, že velikost úhlu ASB je dvojnásobkem velikosti úhlu ACB.
Platnost tohoto tvrzení si můžeme jednoduše dokázat. Trojúhelníky ASC a BSC jsou rovnoramenné (ramena jsou poloměry kružnice). Shodné úhly v trojúhelníku ASC označíme α, v trojúhelníku BCS jako β. Velikost úhlu ACB je proto rovna $\alpha + \beta$.
Lehce spočítáme, že velikost úhlu BSC se rovná $180^\circ - 2\beta$ a velikost úhlu ASC se rovná $180^\circ - 2\alpha$. Velikost úhlu ASB (středový úhel) můžeme vyjádřit jako $360^\circ - (180^\circ - 2\beta) - (180^\circ - 2\alpha) = 2\beta + 2\alpha = 2(\alpha + \beta)$, což je dvojnásobek úhlu ACB (obvodový úhel).

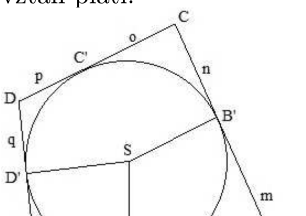


Nyní už si můžeme lehce ověřit, že vztah pro vnitřní úhly tětivového čtyřúhelníku opravdu platí.
Označme vnitřní úhel u vrcholu A jako α a úhel u vrcholu B jako β.
Jestliže má obvodový úhel BAD velikost α, pak má středový úhel BSD velikost 2α. Podobně má středový úhel BSD velikost 2β.
$2\alpha + 2\beta$ tvoří dohromady plný úhel, platí tedy, že $2\alpha + 2\beta = 360°$, $\alpha + \beta = 180°$.
Tím jsme dokázali, že součet protějších vnitřních úhlů se rovná 180°.
Analogicky bychom mohli dokázat, že vztah platí také pro druhou dvojici vnitřních úhlů.

Tečnový čtyřúhelník



Tečnový čtyřúhelník, je takový čtyřúhelník, jemuž se dá vepsat kružnice. Jinými slovy jsou strany tečnového čtyřúhelníku tečnami dané kružnice.
Pro tento čtyřúhelník platí, že součty velikostí jeho protějších stran se rovnají.
Pro čtyřúhelník na obrázku by tento vztah vypadal takto: $\boldsymbol{a + d = b + c}$. My si nyní ukážeme, proč tento vztah platí.



Střed kružnice označme S, body dotyku kružnice se stranami čtyřúhelníku po řadě jako A', B', C', D'.
Vzdálenosti sousedních bodů na stranách čtyřúhelníku označíme písmeny k až r.
Vztah, který chceme dokázat, si tedy můžeme přepsat do následujícího tvaru:
$\boldsymbol{k + l + p + o \ = m + n + q + r}$.
Podívejme se blíž na čtyřúhelník $A'BB'S$.
Oba trojúhelníky $A'BS$ a $BB'S$ jsou pravoúhlé, což vyplývá z vlastností tečny (je kolmá na průměr kružnice). Velikost úsečky $A'S$ je poloměrem kružnice, stejně jako úsečka SB'. Z toho plyne, že se velikosti těchto úseček rovnají. Úsečka SB je přeponou v obou trojúhelnících.
Strany $A'B$ a BB' jsou proto také shodné. Platí tedy $\boldsymbol{l = m}$.
Podobně bychom mohli odvodit, že úsek $\boldsymbol{n = o}$, $\boldsymbol{p = q}$, $\boldsymbol{r = k}$.
Z toho už přímo vyplývá rovnost $\boldsymbol{k + l + p + o \ = m + n + q + r}$.

Péťa, Katka

Výsledkové listiny

Tady najdete jen několik nejlepších řešitelů, pro úplné výsledkové listiny se podívejte na naše internetové stránky.

6. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Klára	Mořkovská	7	6	0	6	3	3	25	61
2.	Jan	Kačenka	-	6	-	6	-	-	12	57
3.-4.	Jakub	Kára	-	-	-	-	-	-	0	33
	Dušan	Morbitzer	-	-	-	-	-	-	0	33
5.	Ondřej	Šerek	-	-	-	-	-	-	0	6

7. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Martin	Dušek	3	6	1	6	1	6	23	74
2.	Barbara	Gaura	-	6	-	-	-	6	12	65
3.	Jan	Havelka	-	6	-	6	-	6	18	60
4.	Berenika	Čermáková	7	6	-	-	-	-	13	57
5.-6.	Michal	Kresta	-	2	-	6	-	2	10	53
	Jan	Preiss	-	4	-	-	4	-	8	53
7.	Bára	Tížková	-	6	-	-	1	-	7	38
8.	Adéla	Hanková	-	3	-	6	-	0	9	33
9.	Zuzana	Nieslaniková	-	-	-	-	-	-	0	9
10.	Dominika	Čmielová	-	-	-	-	-	-	0	6
11.	Barbora	Plucnarová	-	-	-	-	-	-	0	3
12.	Simona	Ogrodzká	-	-	-	-	-	-	0	1

8. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Aleš	Krčil	7	6	2	6	5	6	32	105
2.	Alžběta	Maleňáková	7	6	2	6	5	6	32	102
3.	Eliška	Červenková	4	6	-	6	1	6	23	78
4.	Ondřej	Beránek	-	-	-	-	-	-	0	57
5.	Martin	Karlík	4	6	0	6	4	5	25	56

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
6.	Adam	Poloček	7	6	-	6	5	2	26	55
7.-8.	Matouš	Petřík	-	-	-	-	-	-	0	51
	Damian	Waloszek	7	-	-	6	-	2	15	51
9.-10.	Tomáš	Nguyen	-	-	-	-	-	-	0	44
	Magdalena	Poukarová	-	6	-	6	1	3	16	44
11.	Pavel	Vondráček	-	-	-	-	-	-	0	37
12.-13.	Veronika	Aulichová	-	-	-	-	-	-	0	25
	Anastázie	Chalupová	-	6	-	6	-	-	12	25
14.	Tomáš	Bajer	-	-	-	-	-	-	0	21
15.	Johana	Koberová	-	-	-	-	-	-	0	17
16.	Tereza	Kotlasová	-	-	-	-	-	-	0	10
17.	Daniel	Smetana	-	-	-	-	-	-	0	7
18.-19.	Barbora	Brabcová	-	-	-	-	1	-	1	5
	Veronika	Neustadtová	3	2	-	-	0	-	5	5
20.	Lucie	Burgetová	-	-	-	-	-	-	0	3
21.-22.	Anna	Gociek	-	-	-	-	-	-	0	2
	David	Nový	-	-	-	-	-	2	2	2

9. ročník

	jméno	*příjmení*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*S*	$\sum$
1.	Anna	Kufová	7	6	6	6	5	6	36	110
2.	Adam	Gaura	7	6	2	6	4	6	31	84
3.	Daniel	Pišťák	5	6	-	6	4	0	21	82
4.	Marek	Janka	-	-	-	-	-	-	0	60
5.	Tereza	Tížková	7	6	0	6	1	6	26	56
6.	Jan	Jedlička	-	-	-	-	-	-	0	31
7.	Matěj	Švanda	-	-	-	-	-	-	0	24
8.	Karolína	Škovronová	1	-	0	0	1	0	2	22
9.-10.	David	Šimon	-	-	-	-	-	-	0	13
	Michal	Štěpán	0	-	-	-	-	-	0	13
11.	Aleš	Lipl	0	-	-	-	-	-	0	10
12.	Daniel	Musil	-	-	-	-	-	-	0	8
13.	Tran	Ngoc Mai	-	-	-	-	-	-	0	4